**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ**
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ
«ОДИНЦОВСКИЙ ТЕХНИКУМ»

---

# Учебно-методические рекомендации для подготовки к экзамену по дисциплине «Архитектура аппаратных средств. Элементы математической логики» для студентов СПО специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование» технический профиль

Составитель: Овсянко Сергей Владимирович, преподаватель
ГБПОУ МО « Одинцовский техникум»

| | | |
|---|---|---|
| _преподаватель_____ | _____ | _Овсянко С.В._____ |
| *должность* | *подпись* | *ФИО* |

УТВЕРЖДЕНО

на заседании цикловой комиссии протокол

№ _118_ от «_09_» сентября 2022 г.

Председатель _____Кузнецова И.В.

*подпись* *ФИО*

СОГЛАСОВАНО
Заместитель директора
по учебно-методической работе _____ Галушкина В.Н.
*подпись* *ФИО*

Одинцово 2022г.

**Учебно-методические рекомендации для подготовки к экзамену по дисциплине «Архитектура аппаратных средств. Элементы математической логики» для студентов СПО 09.02.07 «Информационные системы и программирование» технический профиль**

Введение.

Учебно-методические рекомендации по дисциплине «Архитектура аппаратных средств. Элементы математической логики» призваны осуществить практическую поддержку теоретического курса.

Рекомендации содержат типичные задания и наиболее важные задачи, необходимые для приобретения опыта практической деятельности по этой дисциплине. Рекомендации написаны в соответствии с действующей программой по дисциплине «Архитектура аппаратных средств. Элементы математической логики».

Основной задачей изучения этой дисциплины при подготовке студентов технических специальностей и направлений является обеспечение условий для формирования профессиональной компетентности в области информационных систем различного назначения. Благодаря изучению дисциплины «Архитектура аппаратных средств. Элементы математической логики» будущий выпускник будет подготовлен к решению профессиональных задач в проектно-конструкторской и производственно-технической деятельности. В свою очередь знания математической логики будут востребованы при изучении таких спецдисциплин как «Программирование на языке высокого уровня», « Основы теории управления», « Организация ЭВМ и систем», « Базы данных», « Методы и средства защиты компьютерной информации» и других.

Целью рекомендаций является оказание методической помощи студентам при выполнении практических заданий по этой дисциплине. Поэтому каждое занятие начинается с кратких теоретических сведений, необходимых для выполнения практических заданий. Широко представлена система упражнений: для каждого учебного элемента в рекомендациях имеется практическое задание, и для каждого вида заданий в рекомендациях имеется соответствующий образец решения с подробными комментариями.

«Архитектура аппаратных средств. Элементы математической логики» является глубоко абстрактной и поэтому весьма сложно усваиваемой студентами наукой, по которой недостаточно доступной учебно-методической литературы. Однако структура данных рекомендаций не позволяет включить в них в полном объёме весь теоретический материал, необходимый для осмысленного выполнения практических заданий. Так как в этой дисциплине много новых терминов и математических символов. Поэтому для выполнения практических заданий рекомендуется предварительно внимательно

ознакомиться с содержанием соответствующих лекций. Вместе с тем, основные сокращения, символы и обозначения приведены в конце пособия.

## Раздел 1. Построение логических исчислений.

### Занятие 1. Логика высказываний. Совершенные и минимальные формы.

**Формула F** называется тавтологией, если самый правый из столбцов таблицы истинности – столбец значений, содержит единицы ( истина), и только единицы. Обозначение тавтологии : $|=F$

Теорема критерий тождественно истинной формулы алгебры логики. Для того чтобы формула логики высказываний была тавтологией, необходимо и достаточно, чтобы в её КН- форме каждый дизъюнкт содержал слагаемым хотя бы одну переменную вместе с её отрицанием. **Теорема** Критерий тождественно ложной формулы алгебры логики: Для того, чтобы формула логики высказываний была тождественно ложной, необходимо и достаточно, чтобы в её ДН-форме каждой канъюнкт содержал сомножителем хотя бы одну переменную вместе с её отрицанием.

### Упражнения.

**Задание 1.1.**

Докажите тождества аналитически и проверьте с помощью таблицы истинности:

а) $x \to 1 = 1$
б) $x \mid 0 = 1$
в) $x \downarrow 1 = 0$
г) $x \to x = 1$
д) $x \leftrightarrow x = 0$
е) $0 \to x = 1$
ж) $x \leftrightarrow x = 1$
з) $x \mid 1 = \overline{x}$
и) $x \downarrow x = \overline{x}$
к) $x \downarrow 0 = \overline{x}$

**Задание 1.2.** Докажите или опровергните: а)

$A \wedge B\ 1 \Leftrightarrow A \vee B = 1$

б) $(AB) \wedge (B \to C) = A \to C$

в) $A \to (A \to B) = 1$

г) $\overline{x} \to x = x$

д) $x \downarrow \overline{x} = 0$

е) $A \to B = 1 \Leftrightarrow A \vee B = 1$

ж) $A \to B = B \to A$

з) $A \to (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C)) = 1$

и) $x \mid y = \overline{x} \downarrow \overline{y}$

к) $x \downarrow y = \overline{x} \mid \overline{y}$

**Задание 1.3.** Задана формула $(x \vee \overline{y}) \wedge \overline{z}\,(\overline{x} \vee y)$ A).
Выпишите все возможные подформулы этой формулы.

Б). Постройте граф-схему этой формулы.
В). Минимизируйте формулу.
Решение:
А) Подформулами будут все переменные $x, y, z$, входящие в данную формулу ( это подформулы с нулевым числом логических связок).
Подформулы с одной логической связкой : $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Подформулы с двумя логическими связками : $x \vee \bar{y}$ , $x\ \bar{z}$ , $\bar{x} \vee y$
Подформула с четырьмя логическими связками : $\bar{z}(\bar{x} \vee y)$.
Пять логических связок у подформулы $x\ \bar{z}(\bar{x} \vee y)$ и т.д.
Б). Граф схема формулы $(x \vee \bar{y})\ x\ \bar{z}(\bar{x} \vee y)$ имеет вид ( смотри рисунок)
В) Минимизируем формулу, используя равносильности алгебры логики
$(x \vee \bar{y})\ x\bar{z}\ (\bar{x} \vee y) = (x \vee \bar{y})\ x\ \bar{z}\ y = x \vee \bar{y} \cdot x\ \bar{z}y \vee (x \vee \bar{y}) \cdot x\ \bar{z}y =$
$= (x \vee \bar{y}) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) = x\bar{y} \vee xz \vee \bar{y} = xz \vee \bar{y}$

**Задание 1.4.**
Выпишите все возможные подформулы заданных формул. Составив таблицы истинности этих формул, докажите, что они являются тавтологиями: а) $(((X \wedge Y) \wedge Z) \leftrightarrow (X \wedge (Y \wedge Z))$ ( ассоциативность конъюкции );
б) $(((X \vee Y) \vee Z) \leftrightarrow (X \vee (Y \vee Z))$ ( ассоциативность дизъюнкции)
в) $(X \wedge (Y \vee Z)) \leftrightarrow ((X \vee Z) \vee (X \wedge Z))$ ( дистрибутивность конъюкции относительно дизъюнкции);
г) $(X \vee (Y \wedge Z)) \leftrightarrow ((X \vee Z) \wedge (X \vee Z))$ ( дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции);
д) $X \vee (X \wedge Y) \leftrightarrow X$ ( закон поглощения);
е) $X \wedge (X \vee Y) \leftrightarrow X$ ( закон поглощения);
ж) $X \vee (X \wedge Y) \leftrightarrow X \vee Y$ ( закон поглощения);
з) $X \wedge (X \vee Y) \leftrightarrow X \wedge Y$ ( закон поглощения);
и) $(X \wedge Y) \vee (X \wedge Y) \leftrightarrow X$ ( закон склеивания);
к) $(X \vee Y) \wedge (X \vee Y) \leftrightarrow X$ ( закон склеивания).

**Задание 1.5**
Определите логическое значение последнего высказывания, исходя из логических значений всех предыдущих высказываний.
а) $(A \vee B) \rightarrow A = 1$ , $A \rightarrow B = 1$ , $\bar{A} \leftrightarrow B = ?$
Решение:
Из первого условия $(A \vee B) \rightarrow A=1$ заключаем, что невозможна ситуация, когда $(A \vee B) = 1$, а $A = 0$, то есть $A=0$ и при этом $B=1$.
Второе условие $A \vee B = 1$ исключает ситуацию, при которой $A=1$ и $B=0$, Следовательно, высказывания А и В имеют одинаковые значения истинности. Значит, одинаковые значения истинности имеют и их отрицания $\bar{A}$ и В. Отсюда высказывание $\bar{A} \rightarrow B$ будет истинно. б) $A \leftrightarrow B = 1$, $(A \rightarrow B)(\bar{A} \rightarrow B) = ?$

Решение:
Из первого условия $A \leftrightarrow B = 1$ следует, что A и B имеют одинаковые значения истинности. Тогда одинаковые значения истинности имеют и их отрицания $\bar{A}$ и B. Значит, обе импликации $A \rightarrow B$ и $\bar{A} \rightarrow B$ истинны. Следовательно, истинна и конъюкция двух последних высказываний.

**Задание 1.6.**
Выполните задание по образцу задания 1.5. Определите логическое значение последнего высказывания, исходя из логических значений всех предыдущих высказываний.

а) $A \rightarrow B = 1$, $A \leftrightarrow B=0$, $B \rightarrow A =?$
б) $A \rightarrow B = 1$, $(\neg A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee B) =?$
в) $A \leftrightarrow B = 0$, $\neg B \rightarrow A = ?$
г) $A \wedge B = 0$, $A \rightarrow B = 1$, $B \rightarrow \neg A=?$
д) $A \leftrightarrow B=0$, $A \rightarrow B = 1$, $(\neg A \rightarrow B) \leftrightarrow A=?$
е) $A \vee B = 1$, $A \rightarrow B = 1$, $\neg B \rightarrow A =?$
ж) $A \wedge B = 0$, $A \leftrightarrow B = 0$, $A \rightarrow B = 1$, $A=?$
з) $A \wedge B = 0$, $A \leftrightarrow B = 0$, $A \rightarrow B =1$, $B=?$
и) $A \wedge B = 0$, $A \vee B = 1$, $A \rightarrow B = 1$, $B \rightarrow A=?$
к) $A \rightarrow (B \leftrightarrow A) = 0$, $A \rightarrow B =?$

**Задание 1.7.**
Составьте таблицу истинности для формулы $((P \vee \bar{Q}) \rightarrow Q)(P \vee Q)$ и укажите, является ли она выполнимой, опровержимой, тождественно истинной ( тавтологией) или тождественно ложной ( противоречием ).
Решение:
Пользуясь определениями логических связок, составим таблицу истинности данной формулы ( логические значения этой формулы записаны в последнем столбце таблицы, где сама формула обозначения F(P, Q)):

| P | Q | $\bar{Q}$ | P v Q | $(P \vee \bar{Q}) \rightarrow \bar{Q}$ | P | P v Q | F( P, Q ) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Из построенной таблицы истинности видно, что данная формула выполнима, так как если, например, вместо пропозициональной переменной P

вставить в формулу ложное высказывание, а вместо Q – истинное, то вся формула превратится в истинное высказывание. Но эта формула является также и опровержимой, поскольку если, например, вместо пропозициональной переменной P вставить в формулу истинное высказывание, а вместо переменной Q – ложное, то вся формула превратится в ложное высказывание. Следовательно, формула не является ни тавтологией, ни тождественно ложной формулой.

**Задание 1.8.**

Выполните задание по образцу задания 1.7. Составьте таблицы истинности для следующих формул и укажите, какие из формул являются выполнимыми, какие – опровержимыми, какие тождественно истинными ( тавтологиями), какие – тождественно ложными ( противоречиями) : а) $( P \to Q ) \to (( P \to \bar{Q} ) \to P )$;

б) $(( P \to Q ) \to P ) \to Q$;

в) $( P ( Q \vee P )) (( \bar{Q} \to P ) \vee Q )$;

г) $(( P \bar{Q} ) \to Q ) \to ( P \to Q )$.

**Задание 1.9. ( 1.23.)** Докажите,
что :

а) если $l = \neg F \vee G$, $l = \neg G \vee \neg H$, то $l = F \to \neg H$;

б) если $l = G \to F$, $l = ( \neg F \wedge H ) \leftrightarrow G$, $l = H$, то $l = \neg G \wedge H$.

Решение:

а) Пусть $F( X_1 \ldots\ldots X_n)$, $G(X_1 \ldots X_n)$, $H( X_1 \ldots X_n)$ - формулы, о которых идёт речь в этой задаче. Предположим, что формула $F \to \neg H$ не является тавтологией. Это означает, что существуют такие конкретные высказывания $A_1 \ldots A_n$, что высказывание $F( A_1 \ldots A_n )$ истинно, а высказывание $\neg H(A_1 \ldots A_n)$ ложно. Тогда высказывание $\neg F ( A_1 \ldots A_n )$ ложно. Далее, так как формула $\neg F \vee G$ является тавтологией, то высказывание $G ( A_1 \ldots A_n )$ истинно. Но с другой стороны, поскольку $\neg G \vee \neg H$ - тавтология, то высказывание $\neg G ( A_1 \ldots A_n )$ истинно.

Получили противоречие. Следовательно формула $F \to \neg H$ - тавтология.

Решение:

б) Предположим, что посылка данного утверждения верна, а заключение нет, то есть формулы $G \to F$, $( \neg F \wedge H ) \leftrightarrow G$ и $H$ являются тавтологиями, а формула $\neg G \wedge H$ - нет. Последнее означает: найдутся такие конкретные высказывания $A_1 \ldots A_n$, что высказывание $\neg G ( A_1 \ldots A_n ) \wedge H ( A_1 \ldots A_n)$ будет ложным. Это в свою очередь, возможно лишь в том случае, когда по меньшей мере, одно из высказываний $\neg G ( A_1 \ldots A_n )$ или $H ( A_1 \ldots A_n )$ будет ложным. Высказывание $H ( A_1 \ldots A_n )$ ложным быть не может, поскольку это противоречило бы тождественной истинности формулы $H( X_1 \ldots X_n)$ . Следовательно, ложно высказывание $\neg G ( A_1 \ldots A_n )$ и, значит, истинно высказывание $G ( A_1 \ldots A_n )$. В таком случае, из истинности

высказывания $G(A_1 \ldots A_n) \to F(A_1 \ldots A_n)$ вытекает истинность высказывания
$F(A_1 \ldots A_n)$.
Рассмотрим высказывание $(\neg F(A_1 \ldots A_n) \wedge H(A_1 \ldots A_n)) \leftrightarrow G(A_1 \ldots A_n)$, которое истинно, так как формула $(\neg F \wedge H) \leftrightarrow G$, по предположению, является тавтологией. Так как истинно высказывание $F(A_1 \ldots A_n)$, то левая часть рассматриваемой эквивалентности есть ложное высказывание. Значит, её правая часть, то есть высказывание $G(A_1 \ldots A_n)$, так же ложно. Но это противоречит ранее установленной истинности этого высказывания.
Таким образом, сделанное допущение приводит к противоречию.
Следовательно, допущение неверно, а верно доказываемое утверждение.

**Задание 1.10. ( 1.36).**

Докажите, что справедливо следующее логическое следование, руководствуясь определением этого понятия: $P\ Q \vee R \mid = P \vee (Q \to R)$. Выясните, будут ли верны обратные следования, то есть будет ли формула, стоящая слева, логическим следствием формулы, стоящей справа.

Решение:

Составим таблицу истинности для формул $P\ Q \vee R$ и $P \vee (Q \to R)$, участвующих в отношении следования:

| P | Q | R | P·Q | P·QvR | Q→R | Pv(Q→R) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | | | ( * ) | | (**) |

Последовательный просмотр по строкам столбцов (*) и (**) показывает, что как только в какой-либо строке столбца (*) появляется 1, так сейчас же в этой строке и в столбце (**) обнаруживается 1. Значит, требуемое логическое следование действительно выполняется.
Обратное же следование неверно, поскольку, например, в первой же строке ( т.е. при P=0, Q=0, R=0) формула $P \vee (Q \to R)$ принимает значение 1 ( столбец (**)), а формула $P \cdot Q \vee R$ тем не менее принимает значение 0 (столбец (*)).

**Задание 1.11. ( 1. 37).**

Для следующих формул выясните, будет ли какая-либо из них логическим следствием другой:

а) $P \cdot Q \to R$ , $(P \vee Q) \to R$;

б) $P \cdot Q \to R$, $P \vee (Q \to R)$.

Решение:

а) Составим таблицу истинности данных формул:

| P | Q | R | P·Q | P·Q → R | P v Q | (PvQ)→R |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | | | ( * ) | | (**) |

Сопоставляя столбцы (*) и (**), видим, что во всей строке, в которой в столбце (**) стоит 1, в столбце (*) так же стоит 1, но не наоборот ( например, третья строка). Это означает, что первая данная формула является логическим следствием второй, но вторая, в свою очередь, не является логическим следствием первой.

б) Составим таблицу истинности данных формул:

| P | Q | R | P·Q | P·Q → R | P → Q | Pv(Q→R) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | ( * ) | | (**) |

Сравнивая столбцы значений данных формул, видим, что в третьей строке первая формула принимает значение 1, а вторая – хначение 0, в то время как в седьмой строке вторая формула принимает значение 1 а первая 0. Следовательно, ни одна формула из двух данных не является логическим следствием другой.

**Задание 1. 12. ( 1. 38.)**

Пользуясь определением понятия логического следствия, вясните, справедливы ли следующие логические следования:

а) $P \cdot Q$, $\neg R \rightarrow \neg Q$ l = R;

б) $P \cdot Q \rightarrow R$, $\neg R$ l = $\neg Q$

Решение:

а) Составим сначала таблицу истинности для всех трёх данных формул $P \cdot Q$, $\neg R \rightarrow \neg Q$ и R , участвующих в рассматриваемом отношении:

| P | Q | R | $P \cdot Q$ | $\neg$ R | $\neg$ Q | $\neg R \rightarrow \neg Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| | | (***) | (*) | | | (**) |

Отметим столбцы таблицы, отвечающие данным формулам $P \cdot Q$, $\neg R \rightarrow \neg Q$, R, символами (*), (**), (***) соответственно. Чтобы проверить выполнимость определения логического следования для данных формул, нужно найти все те строки таблицы, в которых в обоих столбцах (*) и (**) стоят единицы, и убедиться, что в каждой из этих строк в столбце (***) также стоит единица. Значит, доказываемое логическое следование справедливо ( строки, в которых не в обоих столбцах (*) и (**) стоят единицы, автоматически удовлетворяют условию из определения логического следования: для них посылка этого условия, представляющего собой импликацию, ложна, а значит , сама импликация истинна).

Решение:

б) Составим таблицу истинности для всех трёх данных формул.

| P | Q | R | P·Q | P·Q→R | ¬ R | ¬Q |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | |

Найдём те строки, в котором обе посылки ( P·Q) →R и ¬R принимают значение 1. Это 1-я, 3-я, 5-я строки. При этом в 1-й и 5-й строках формула ¬Q также принимают значение 1, но в 3-й строке этого не происходит: ¬Q принимает значение 0. Именно здесь « проваливается» определение логического следования, а значит, формула ¬Q не является логическим следствием формул ( P ·Q)→R и ¬R

**Задание 1.13. (1.40.)**

Методом от противного выясните, верно ли следующее логическое следование: F→G , K→KH, H v ¬G l = F → ¬K Решение:

Допустим, что данное логическое следование не выполняется, то есть существуют такие конкретные высказывания, которые превращают все формулы-посылки в истинные высказывания, а формулу-заключение F→¬K - в ложное. Тогда из F→¬K=0 следует, что F=1 и ¬K=0, то есть K=1. Из F→G=1 и F=1 следует, что G=1. Далее, из Hv¬G=1 и G=1 заключаем, что H=1, то есть ¬H=0. Наконец из K→¬H=1 и ¬H=0 получаем K=0. Пришли к противоречию. Следовательно, формула F→¬K не может превращаться в ложное высказывание, если все формулы F→G, K→¬H, Hv¬G превратились в истинные высказывания. Это означает, что рассматриваемое логическое следование верно.

**Задание 1.14**

Докажите, что формула P·Q→((RvQ)→(Q·Q̄)) выполнима, не составляя для неё таблицу истинности, а указав какие-нибудь значения входящих в неё пропозициональных переменных, при которых эта формула обращается в истинное высказывание.

Решение:

Заключение второй импликации есть тождественно ложная формула. Поэтому если посылка $R \vee Q$ второй импликации превратится при некоторой подстановке в ложное высказывание, то эта импликация станет истинным высказыванием и, следовательно, вся данная импликация превратится в истинное высказывание независимо от того, в какое высказывание обратится посылка $P \cdot Q$ всей данной импликации. Посылка $R \vee Q$ второй импликации обращается в ложное высказывание, когда вместо переменных R и Q подставляется ложные высказывания. Итак, данная формула выполнима, поскольку она обращается в истинное высказывание, если вместо R и Q подставить ложные высказывания, а вместо P – произвольное высказывание ( его истинностное значение в данном случае не повлияет на истинностное значение всего высказывания).

**Задание 1.15.**

Докажите, что формула $( X \vee Y ) \rightarrow (( \neg X \wedge Y ) \vee ( X \wedge \neg Y ))$ опровержима, не составляя для неё таблицу истинности, а указав какие-нибудь значения входящих в неё пропозициональных переменных, при которых эта формула обращается в ложное высказывание.

Решение:

Импликация ложна лишь в одном случае: когда её посылка истинна, а следствие ложно. Следствием данной импликации является дизъюнкция, которая ложна тогда и только тогда, когда оба её слагаемых ложны. Формула обратится в ложное высказывание, если найдутся такие высказывания A и B , что высказывание $A \vee B$ истинно, а оба высказывания $\neg A \wedge B$ и $A \wedge \neg B$ ложны. Если высказывания A и B имеют разные истинностные значения, то высказывания $\neg A \wedge B$ и $A \wedge \neg B$ не могут быть ложны оба. Поэтому A и B либо оба истинны, либо оба ложны. Но если A и B оба ложны, то высказывание $A \vee B$ ложно, что нас не устраивает. Следовательно, A и B должны быть оба истинны. Итак,мы доказали, что данная формула превращается в ложное высказывание в том и только в том одном случае,

## Занятие № 2.
## Логика предикатов. Логическое следование.

Логическое следование. Высказывательная форма $\Phi_2$ следует из высказывательной формы $\Phi_1$, если импликация $\Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ обращается в истинное высказывание при любых наборах значений переменных входящих в неё. Формула $\Phi_2$ называется логическим следствием формулы $\Phi_1$ , если при всякой интерпретации, при которой $\Phi_1$ превращается в тождественно истинный предикат, формула $\Phi_2$ тоже тождественно истинный предикат. Обозначение логического следования $\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2$ или $\Phi_1 \models \Phi_2$. Две формулы

равносильны тогда, и только тогда, когда каждая их них является логическим следствием другой λ [ ] - логическое значение формулы F.

Равносильности логики предикатов.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | □x□yQ(x, y) □□□y□xQ(x, y) | Правила перестановки | 1□ | □x□yQ(x, y) □□□y□xQ(x, y) |
| 2. | □x□yQ(x, y) □□□y□xQ(x, y) | одноимённых кванторов | | |
| 3. | □xF(x) □□□xF(x) | Перенос отрицания с квантора на предикат | 3□ | □xF(x) □□□xF(x) |
| | | | 4□ | □□xF(x) □□□xF(x) □□xF(x) □□□xF(x) |
| 4. | □xF(x) □□□xF(x) | | | |
| 5. | □x(F(x) □Φ(x)) □ □□□xF(x) □□□xΦ(x) | Правила дистрибутив-ности кванторов | 5□ | □□x(F(x) □Φ(x)) □ □□□xF(x) □□□xΦ(x) |
| 6. | □x(F(x) □□(x))□ □□xF (x) □□□x ‘x’ | | 6□ | □□õF(õ) □□□õÔ(õ)□□ □□□õ(F(x) □Ô(õ)) |
| 7. | □x(M □□F(x)) □□M □□□xF(x) | | 7□ | □□x(M □□F(x)) □□M □□□xF(x) |
| 8. | □x(M □□F(x))□□M □□□xF(x) | | 8□ | □□x(M □□F(x))□□M □□□xF(x) |
| 9. | □xP(x) □□xP(x) | | 9□ | □□xP(x) □□□xP(x) |

## Нормальные формы логики предикатов.

Приведённой называется формула, содержащая в качестве логических символов только стандартный базис : ¬ (¯), ∧, ∨, где символ ¬ встречается только перед элементарными ( автомарными) подформулами. **Нормальной** называется приведённая формула, если она содержит все символы кванторов впереди или не содержит кванторов вообще ( то есть логические символы и символы предикатов стоят в области действия каждого квантора).

Формула А логики предикатов задана в предваренной ( пренексной) нормальной форме, если она имеет вид $Q_1 X_1 \ldots Q_n X_n B(x_1 \ldots x_n)$, где $Q_1$ – квантор. □ или □□□а формула B ( $x_1 \ldots x_n$) не содержит кванторов и приведена к КНФ.

Скулемовской называется такая пренексная форма, которая содержит только квантор □□.

Доказано, что любую формулу логики предикатов можно привести к предваренной нормальной форме.

Алгоритм:

1) исключить все вхождения связок ↔ ,→ с помощью эквивалентных преобразований снятие импликации ( 13 ) $a \to b = \bar{a} \vee b$ и снятие эквиваленции (14) $a \sim b = a b \vee \bar{a} b$ ;

2) перенести все вхождения символа отрицания с квантора на предикат с помощью эквивалентных преобразований 3, 3□□ 4 , 4 , а так же законов де Моргана и др. ;

3) вынести все кванторы из формул в их начало, за скобки, с помощью эквивалентных преобразований 7, 7□□□

4) исключить кванторы существования, а переменные, связанные этими кванторами, заменить скулемовскими формами;

5) в стандартной форме все кванторы общности перенести в начало формулы, область действия каждого из них включить в формулу, так как кванторы больше не несут никакой информации ,то их опустить; 6) формулу привести к КНФ с помощью эквивалентных преобразований; 7) знаки конъюнкции исключить, тогда формулы распадаются на множество дизъюнктов.

Клаузальной нормальной формой ( клауза – умозаключение) называется КНФ формулы логики предикатов.

Формула F в логике предикатов называется выполнимой ( опровержимой) на множестве M, если хотя бы при одной подстановке вместо предикатных переменных конкретных предикатов, заданных на этом множестве M, она превращается в выполнимый ( опровержимый) предикат.

Формула F в логике предикатов называется общезначимой или тавтологией, если она тождественно истинна в любой интерпретации, то есть при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на всевозможных множествах. Обозначается тавтология символом |=F.

Упражнения.

**Задание 2.1.**

На множестве M { 2, 3, 4, 6, 8 } :

а) выпишите бинарные отношения, соответствующие предикату P «$x^2 > 3y$» ;

б) составьте таблицу истинности для этого предиката.

Решение:

а) бинарные отношения, соответствующие предикатами P, имеют вид:

$2^2 > 3 \cdot 2$, $3^2 > 3 \cdot 2$, $4^2 > 3 \cdot 2$, $6^2 > 3 \cdot 2$

$2^2 > 3 \cdot 3$, $3^2 > 3 \cdot 3$, $4^2 > 3 \cdot 3$, $6^2 > 3 \cdot 3$

$2^2 > 3 \cdot 4$, $3^2 > 3 \cdot 4$, $4^2 > 3 \cdot 4$, $6^2 > 3 \cdot 4$

$2^2 > 3 \cdot 6$, $2^2 > 3 \cdot 6$, $2^2 > 3 \cdot 6$, $2^2 > 3 \cdot 6$

Решение:

б) Таблица истинности, соответствующая предикатам, имеет вид:

| xy 2 | 3 | 4 | 6 2 | л |
|---|---|---|---|---|
| л л | л | | | |
| 3 | и | л | л | л |
| 4 | и | и | и | л |
| 6 | и | и | и | и |

**Задание 2.2.**

Выполните задание по образцу задания 2.1.

На множестве M = {1, 3, 5, 7 } :

а) выпишите бинарные отношения, соответствующие заданным предикатам P;

б) составьте таблицу истинности для этих предикатов:

а) « $x = y$ » ; е) « $x \neq y$ » ;

б) « $x > y$ » ; ж) « x и y – взаимно простые числа» ;

в) « $x < y$ » ; з) « x делитель y» ;

г) « $x \leq y$ » ; и) « x кратно y» ;

д) « $x \geq y$» ; к) « ( x-y) - простое число» .

**Задание 2.3.**

Докажите, что заданные пары формул логики предикатов равносильны между собой на одноэлементном множестве. Придумайте словестную интерпретацию этих формул:

$\exists x ( P (x) \rightarrow P ( y))$ и $\exists x ( P (x)) \rightarrow P ( y))$.

Решение:

Пусть предикаты заданы на одноэлементном множестве {a}. На этом множестве существуют только два предиката $A_0 (x)$ и $A_1 (x)$, причём $A_1 (a) = 1$ и $A_0 (a) = 0$.

Задание содержит две переменные: переменная x – связанная ( предикатом существования), а переменная y – свободная. Составим таблицу истинности для этой формулы.

| P | y | $\exists x(P(x) \rightarrow P(y))$ | $\exists x P (x)$ | P(y) | $\exists x P(x) \rightarrow P(y)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| A0 | a | 1 | 0 | 0 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | a | 1 | 1 | 1 | 1 |

Подставляя в первую формулу $A_0$ получаем высказывание $\exists x(A_0(x) \to A_0(y))$.На одноэлементном множестве {a} это высказывание истинно, так как тождественно истинен предикат $A_0(x) \to A_0(y)$.
Для второй формулы сначала найдём значения высказывания $\exists xP(x)$. В первой строке имеем $\exists xA_0(x)$ ложное высказывание, во второй $\exists xA_1(x)$ – истинное. Аналогично находим значения P(y) и подставляя их во вторую формулу получаем результат. В результате обе формулы тождественно истинны на одноэлементном множестве {a}.

**Задание 2.4.**

Докажите, что следующие формулы являются тавтологиями предикатов:
а) □□□x) ( P($x$) →Q ) ↔ (( □x) ( P ($x$)) →Q) ;
б) □□□x) ( P($x$)) → ( A x) ( P (x) v Q (x)) ;
Решение:.
а) Отметим, что для предикатной переменной Q в формуле □□□x) ( P($x$) →Q ) ↔ ↔ (( □x) ( P ($x$)) →Q) ; не указано число переменных, так как она может быть не только 0-местной, но и любой n – местной.
Важно лишь, чтобы в неё не входила предметная переменная x. Пусть Q есть Q ( $y_1$ …$y_n$ ). Будем считать для краткости , что Q есть предикатная переменная Q
(y).
Предположим, что данная формула не является тавтологией. Тогда существуют такие конкретные предикаты A(x) и B(y), определённые на множествах M и $M_1$ соответственно, что предикат ( от y) □□□x) ( A($x$) →B(y) ) ↔ ( □x) ( A ($x$)→B (y)) опровержим, то есть обращается в ложное высказывание при подстановке вместо предметной переменной y некоторого конкретного предмета $b$ из 1 $M$ :

□ [ □□$x$□□□$A$□$x$□□$B$□$b$□□□□□□□$x$□□$A$□$x$□□□$B$□$b$□□□□□□□□0 .
Эта эквивалентность ложна, если ее члены принимают разные значения истинности, т.е. могут представиться две возможности: первая –

□ [ □□$x$□□□$A$□$x$□□$B$□$b$□□□□□□□1 (1),
□
[□□$x$□□□$A$□$x$□□□$B$□$b$□□□□□□
0 (2) и вторая –

□ [ □□$x$□□□$A$□$x$□□$B$□$b$□□□□□□□□0 (3),
□ [ □□$x$□□□$A$□$x$□□□$B$□$b$□□□□1 (4).
Рассмотрим первую возможность. Из (2) по определению импликации имеем

□ [ □□x□□□A□x□□□□□□1 (5) и □ [ B□b□□□□0 (6). Далее, из (5) по определению квантора существования заключаем, что предикат A□x□□выполним, т.е. □ [ A□a□□□□1 (7) для некоторого a□M.

В соотношении (1) по определению квантора общности предикат A□x□□B□b□□– тождественно истинен. В частности, если вместо предметной переменной x подставить a□M, то получим истинное высказывание □ [ A□a□□□B□b□□□□1.
Но, учитывая (6) и (7), получаем □ [ A□a□□□B□b□□□□□□□[
A□a□□□□□□ [B□b□□□□□1□0 □□0 –
--противоречие.
Рассмотрим вторую возможность, выраженную в соотношениях (3), (4). Из (3), на основании определения квантора общности, следует, что предикат A□x□□B□b□□ опровержим, т.е. □ [ A□a□□□B□b□□□□□□0 для некоторого a□M. Тогда по определению импликации □ [ A□a□□□□□1, □ [ B□b□□□□□□0 (8). Отсюда и из соотношения (4) заключаем, что

□ [ □□x□□□A□x□□□□□□□0 . Последнее означает тождественную ложность предиката
A□x□. В частности, для a□M имеем □ [ A□a□□□□□□0, что противоречит первому из соотношений (8).
Итак, в каждом случае приходим к противоречию, доказывающему невозможность сделанного предположения. Следовательно, данная формула – тавтология.

б) Предположим, что формула □□x□□P□x□□□□□x□□P□x□□Q□x□□□не является тавтологией. Тогда существуют такие предикаты A□x□□и B□x□, определенные на множестве M, что высказывание
□□x□□□A□x□□□□□x□□□A□x□□□B□x□□□ложно.
Импликация ложна, если и только если □ [ □□x□□□A□x□□□□□□1 (1) и
□□□[□□□x□□□A□x□□□B□x□□□□□□□0 (2).
Из (2) по определению квантора общности следует, что предикат A□x□□□B□x□□опровержим, т.е. найдется такое предмет a□M, для которого □ [ A□a□□□B□a□□□□□0, т.е. □ [ A□a□□□□□□0 и
□ [ B□a□□□□□0.
Но утверждение □ [ A□a□□□□□□0 противоречит (1), так как из него по определению квантора общности вытекает, что предикат
A□x□□тождественно истинный, т.е. ни при каком a□M не превращается в ложное высказывание. Следовательно, данная формула – тавтология.

**Задание 2.5.**
Выясните, будут ли выполняться в логике предикатов следующие логические следования:

а) □□x□□S □x□□□P□x□□|= □□x□□P□x□□□□S □x□□□;
б) □□x□□P□x□□Q□x□□|= □□x□□Q□x□□□P□x□□□.
*Решение:*

а) Предположим, что найдутся такие конкретные предикаты *A*□*x*□□и *B*□*x*□□, заданные над конкретным множеством *M*, что □ [ □□*x*□□*B*□*x*□□□*A*□*x*□□□□□□1 (1), а □ [ □□*x*□□□*A*□*x*□□□□□*B* □*x*□□□□□□0 (2).
Из (1) по определению квантора общности следует, что □ [*B*□*a*□□□*A*□*a*□□□□□□1 (3) для любого предмета, *a*□*M*. Из (2) по определению квантора существования следует, что □ [ *A*□*b*□□□□*B*□*b*□□□□□□□0 (4) для некоторого предмета *b*□*M*.
Отсюда видно, что если предикаты *A*□*x*□□и *B*□*x*□□взять такими, что

1,
если x = □ [ B
(x) □ = 0,
если x □ M { }

□□□ [ *A*□*b*□□□□□□0 и □ [ *A*□*x*□□□□□произвольно, если *x* □□*b*□, то противоречия не получится,□ соотношения (3) и (4) будут выполняться, вместе с ними будут выполняться соотношения (1) и (2), которые и будут говорить о том, что рассматриваемое следование неверно. б) Решение:

Допустим, что найдутся такие конкретные предикаты *A*□*x*□□□и *B*□*x*□□, которые заданы над конкретным множеством *M*, что □ [ □□*x*□□□*A*□*x*□□□□*B*□*x*□□□□□□1 (1), а □ [ □□*x*□□□*A*□*x*□□□□*B*□*x*□□□□□□□0 (2). Из (1) по определению квантора общности следует, что □ [ *A*□*a*□□□□*B*□*a*□□□□□□1 (3) для любого предмета *a*□*M*. Из (2) по определению квантора существования следует, что □ [ *A*□*b*□□□*B*□*b*□□□□□□0 (4) для некоторого предмета *b*□*M*.
Тогда из (4) следует, что □ [ *A*□*b*□□□□□1, а □ [ *B*□*b*□□□□□□□0. Два последних соотношения противоречат соотношению (3). Значит, сделанное допущение неверно и рассматриваемое следование справедливо.

10. вычислительная техника».