МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Московской области « Одинцовский техникум»

Учебно-методические рекомендации для подготовки к экзамену по дисциплине « Дискретная математика с элементами математической логики» для студентов СПО 09.02.07 ИС-17 « Информационные системы и программирование» технический профиль

Составитель: Осыко Евгений Анатольевич, преподаватель
ГБПОУ МО « Одинцовский техникум»

_________________ _____________ _____________
должность *подпись* *ФИО*

УТВЕРЖДЕНО на заседании цикловой комиссии

протокол № _____ от «___»_______ 20__ г.
Председатель _____________ _____________

подпись *ФИО*

СОГЛАСОВАНО
Заместитель директора
по учебно-методической работе _____________ _____________
подпись
ФИО

Одинцово 2019г.

Учебно-методические рекомендации для подготовки к экзамену по дисциплине « Дискретная математика с элементами математической логики» для студентов СПО 09.02.07 ИС-17 « Информационные системы и программирование» технический профиль

Введение.

Учебно-методические рекомендации по дисциплине « Дискретная математика с элементами математической логики» призваны осуществить практическую поддержку теоретического курса.

Рекомендации содержат типичные задания и наиболее важные задачи, необходимые для приобретения опыта практической деятельности по этой дисциплине. Рекомендации написаны в соответствии с действующей программой по дисциплине « Дискретная математика с элементами математической логики».

Основной задачей изучения этой дисциплины при подготовке студентов технических специальностей и направлений является обеспечение условий для формирования профессиональной компетентности в области информационных систем различного назначения. Благодаря изучению дисциплины « Дискретная математика с элементами математической логики» будущий выпускник будет подготовлен к решению профессиональных задач в проектно-конструкторской и производственно-технической деятельности. В свою очередь знания математической логики будут востребованы при изучении таких спец.дисциплин как «Программирование на языке высокого уровня», « Основы теории управления», « Организация ЭВМ и систем», « Базы данных», « Методы и средства защиты компьютерной информации» и других.

Целью рекомендаций является оказание методической помощи студентам при выполнении практических заданий по этой дисциплине. Поэтому каждое занятие начинается с кратких теоретических сведений, необходимых для выполнения практических заданий. Широко представлена система упражнений: для каждого учебного элемента в рекомендациях имеется практическое задание, и для каждого вида заданий в рекомендациях имеется соответствующий образец решения с подробными комментариями.

« Дискретная математика с Элементами математической логики» является глубоко абстрактной и поэтому весьма сложно усваиваемой студентами наукой, по которой недостаточно доступной учебно-методической литературы. Однако структура данных рекомендаций не позволяет включить в них в полном объёме весь теоретический материал, необходимый для осмысленного выполнения практических заданий. Так как в этой дисциплине много новых терминов и математических символов. Поэтому для выполнения практических заданий рекомендуется предварительно внимательно ознакомиться с содержанием соответствующих лекций. Вместе с тем, основные сокращения, символы и обозначения приведены в конце пособия.

Раздел 1. Построение логических исчислений.
Занятие 1. Логика высказываний. Совершенные и минимальные формы.

Формула F называется тавтологией, если самый правый из столбцов таблицы истинности – столбец значений, содержит единицы (истина), и только единицы. Обозначение тавтологии : $\models F$

Теорема критерий тождественно истинной формулы алгебры логики.

Для того чтобы формула логики высказываний была тавтологией, необходимо и достаточно, чтобы в её КН- форме каждый дизъюнкт содержал слагаемым хотя бы одну переменную вместе с её отрицанием.

Теорема Критерий тождественно ложной формулы алгебры логики:

Для того, чтобы формула логики высказываний была тождественно ложной, необходимо и достаточно, чтобы в её ДН-форме каждой канъюнкт содержал сомножителем хотя бы одну переменную вместе с её отрицанием.

Упражнения.

Задание 1.1.

Докажите тождества аналитически и проверьте с помощью таблицы истинности:

а) $x \rightarrow 1 = 1$	е) $0 \rightarrow x = 1$
б) $x \mid 0 = 1$	ж) $x \leftrightarrow x = 1$
в) $x \downarrow 1 = 0$	з) $x \mid 1 = \bar{x}$
г) $x \rightarrow x = 1$	и) $x \downarrow x = \bar{x}$
д) $x \leftrightarrow x = 0$	к) $x \downarrow 0 = \bar{x}$

Задание 1.2. Докажите или опровергните:

а) $A \wedge B\ 1 \Leftrightarrow A \vee B = 1$

б) $(AB) \wedge (B \rightarrow C) = A \rightarrow C$

в) $A \rightarrow (A \rightarrow B) = 1$

г) $\bar{x} \rightarrow x = x$

д) $x \downarrow \bar{x} = 0$

е) $A \rightarrow B = 1 \Leftrightarrow A \vee B = 1$

ж) $A \rightarrow B = B \rightarrow A$

з) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) = 1$

и) $x \mid y = \bar{x} \downarrow \bar{y}$

к) $x \downarrow y = \bar{x} \mid \bar{y}$

Задание 1.3. Задана формула $(x \vee \bar{y}) \bigcirc x \bar{z} (\bar{x} \vee y)$
А). Выпишите все возможные подформулы этой формулы.
Б). Постройте граф-схему этой формулы.
В). Минимизируйте формулу.
Решение:
А) Подформулами будут все переменные x, y, z, входящие в данную формулу (это подформулы с нулевым числом логических связок).
Подформулы с одной логической связкой : $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Подформулы с двумя логическими связками : $x \vee \bar{y}$, $x \bar{z}$, $\bar{x} \vee y$
Подформула с четырьмя логическими связками : $\bar{z} (\bar{x} \vee y)$.
Пять логических связок у подформулы $x \bar{z} (\bar{x} \vee y)$ и т.д.
Б). Граф схема формулы $(x \vee \bar{y}) \bigcirc x \bar{z} (\bar{x} \vee y)$ имеет вид (смотри рисунок)
В) Минимизируем формулу, используя равносильности алгебры логики
$(x \vee \bar{y}) \bigcirc x \bar{z} (\bar{x} \vee y) = (x \vee \bar{y}) \bigcirc x \bar{z} y = x \vee \bar{y} \cdot x \bar{z} y \vee (x \vee \bar{y}) \cdot x \bar{z} y =$
$= (x \vee \bar{y}) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) = x \bar{y} \vee x z \vee \bar{y} = x z \vee \bar{y}$

Задание 1.4.
Выпишите все возможные подформулы заданных формул. Составив таблицы истинности этих формул, докажите, что они являются тавтологиями:
а) $(((X \wedge Y) \wedge Z) \leftrightarrow (X \wedge (Y \wedge Z))$ (ассоциативность конъюкции);
б) $(((X \vee Y) \vee Z) \leftrightarrow (X \vee (Y \vee Z))$ (ассоциативность дизъюнкции)
в) $(X \wedge (Y \vee Z)) \leftrightarrow ((X \vee Z) \vee (X \wedge Z))$ (дистрибутивность конъюкции относительно дизъюнкции);
г) $(X \vee (Y \wedge Z)) \leftrightarrow ((X \vee Z) \wedge (X \vee Z))$ (дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции);
д) $X \vee (X \wedge Y) \leftrightarrow X$ (закон поглощения);
е) $X \wedge (X \vee Y) \leftrightarrow X$ (закон поглощения);
ж) $X \vee (X \wedge Y) \leftrightarrow X \vee Y$ (закон поглощения);
з) $X \wedge (X \vee Y) \leftrightarrow X \wedge Y$ (закон поглощения);
и) $(X \wedge Y) \vee (X \wedge Y) \leftrightarrow X$ (закон склеивания);
к) $(X \vee Y) \wedge (X \vee Y) \leftrightarrow X$ (закон склеивания).

Задание 1.5
Определите логическое значение последнего высказывания, исходя из логических значений всех предыдущих высказываний.
а) $(A \vee B) \to A = 1$, $A \to B = 1$, $\bar{A} \leftrightarrow \bar{B} = ?$
Решение:
Из первого условия $(A \vee B) \to A=1$ заключаем, что невозможна ситуация, когда $(A \vee B) = 1$, а $A = 0$, то есть $A=0$ и при этом $B=1$.
Второе условие $A \vee B =1$ исключает ситуацию, при которой $A=1$ и $B=0$,

Следовательно, высказывания A и B имеют одинаковые значения истинности. Значит, одинаковые значения истинности имеют и их отрицания $\bar{A}$ и $\bar{B}$. Отсюда высказывание $\bar{A} \to \bar{B}$ будет истинно.

б) $A \leftrightarrow B = 1$, $(A \to B)(\bar{A} \to \bar{B}) = ?$

Решение:

Из первого условия $A \leftrightarrow B = 1$ следует, что A и B имеют одинаковые значения истинности. Тогда одинаковые значения истинности имеют и их отрицания $\bar{A}$ и $\bar{B}$. Значит, обе импликации $A \to B$ и $\bar{A} \to \bar{B}$ истинны. Следовательно, истинна и конъюкция двух последних высказываний.

Задание 1.6.

Выполните задание по образцу задания 1.5. Определите логическое значение последнего высказывания, исходя из логических значений всех предыдущих высказываний.

а) $A \to B = 1$, $A \leftrightarrow B = 0$, $B \to A = ?$

б) $A \to B = 1$, $(\neg A \wedge B) \to (\neg A \vee B) = ?$

в) $A \leftrightarrow B = 0$, $\neg B \to A = ?$

г) $A \wedge B = 0$, $A \to B = 1$, $B \to \neg A = ?$

д) $A \leftrightarrow B = 0$, $A \to B = 1$, $(\neg A \to B) \leftrightarrow A = ?$

е) $A \vee B = 1$, $A \to B = 1$, $\neg B \to A = ?$

ж) $A \wedge B = 0$, $A \leftrightarrow B = 0$, $A \to B = 1$, $A = ?$

з) $A \wedge B = 0$, $A \leftrightarrow B = 0$, $A \to B = 1$, $B = ?$

и) $A \wedge B = 0$, $A \vee B = 1$, $A \to \bar{B} = 1$, $B \to A = ?$

к) $A \to (B \leftrightarrow A) = 0$, $A \to B = ?$

Задание 1.7.

Составьте таблицу истинности для формулы $((P \vee \bar{Q}) \to Q)(\bar{P} \vee Q)$ и укажите, является ли она выполнимой, опровержимой, тождественно истинной (тавтологией) или тождественно ложной (противоречием).

Решение:

Пользуясь определениями логических связок, составим таблицу истинности данной формулы (логические значения этой формулы записаны в последнем столбце таблицы, где сама формула обозначения F(P, Q)):

P	Q	$\bar{Q}$	$P \vee Q$	$(P \vee \bar{Q}) \to \bar{Q}$	$\bar{P}$	$\bar{P} \vee Q$	F(P, Q)
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1

Из построенной таблицы истинности видно, что данная формула выполнима, так как если, например, вместо пропозициональной переменной P вставить в формулу ложное высказывание, а вместо Q – истинное, то вся формула превратится в истинное высказывание. Но эта формула является также и опровержимой, поскольку если, например, вместо пропозициональной переменной P вставить в формулу истинное высказывание, а вместо переменной Q – ложное, то вся формула превратится в ложное высказывание. Следовательно, формула не является ни тавтологией, ни тождественно ложной формулой.

Задание 1.8.

Выполните задание по образцу задания 1.7. Составьте таблицы истинности для следующих формул и укажите, какие из формул являются выполнимыми, какие – опровержимыми, какие тождественно истинными (тавтологиями), какие – тождественно ложными (противоречиями) :

а) $(P \to Q) \to ((P \to \bar{Q}) \to \bar{P})$;

б) $((P \to Q) \to P) \to Q$;

в) $(P (Q \vee \bar{P})) ((\bar{Q} \to P) \vee Q)$;

г) $((P \bar{Q}) \to Q) \to (P \to Q)$.

Задание 1.9. (1.23.)

Докажите, что :

а) если $\models \neg F \vee G$, $\models \neg G \vee \neg H$, то $\models F \to \neg H$;

б) если $\models G \to F$, $\models (\neg F \wedge H) \leftrightarrow G$, $\models H$, то $\models \neg G \wedge H$.

Решение:

а) Пусть $F(X_1 .... X_n)$, $G(X_1 .... X_n)$, $H(X_1 ..... X_n)$ - формулы, о которых идёт речь в этой задаче. Предположим, что формула $F \to \neg H$ не является тавтологией. Это означает, что существуют такие конкретные высказывания $A_1 ..... A_n$, что высказывание $F(A_1 .... A_n)$ истинно, а высказывание $\neg H(A_1 .... A_n)$ ложно. Тогда высказывание $\neg F (A_1 ... A_n)$ ложно. Далее, так как формула $\neg F \vee G$ является тавтологией, то высказывание $G (A_1 ... A_n)$ истинно. Но с другой стороны, поскольку $\neg G \vee \neg H$ - тавтология, то высказывание $\neg G (A_1 .... A_n)$ истинно. Получили противоречие. Следовательно формула $F \to \neg H$ - тавтология.

Решение:

б) Предположим, что посылка данного утверждения верна, а заключение нет, то есть формулы $G \to F$, $(\neg F \wedge H) \leftrightarrow G$ и H являются тавтологиями, а формула $\neg G \wedge H$ - нет. Последнее означает: найдутся такие конкретные высказывания $A_1 .... A_n$, что высказывание $\neg G (A_1 .... A_n) \wedge H (A_1 ... A_n)$ будет ложным. Это в свою очередь, возможно лишь в том случае, когда по меньшей мере, одно из высказываний $\neg G (A_1 .... A_n)$ или $H (A_1 ... A_n)$

будет ложным. Высказывание $H(A_1 \dots A_n)$ ложным быть не может, поскольку это противоречило бы тождественной истинности формулы $H(X_1 \dots X_n)$. Следовательно, ложно высказывание $\neg G(A_1 \dots A_n)$ и, значит, истинно высказывание $G(A_1 \dots A_n)$. В таком случае, из истинности высказывания $G(A_1 \dots A_n) \rightarrow F(A_1 \dots A_n)$ вытекает истинность высказывания $F(A_1 \dots A_n)$.
Рассмотрим высказывание $(\neg F(A_1 \dots A_n) \wedge H(A_1 \dots A_n)) \leftrightarrow G(A_1 \dots A_n)$, которое истинно, так как формула $(\neg F \wedge H) \leftrightarrow G$, по предположению, является тавтологией. Так как истинно высказывание $F(A_1 \dots A_n)$, то левая часть рассматриваемой эквивалентности есть ложное высказывание. Значит, её правая часть, то есть высказывание $G(A_1 \dots A_n)$, так же ложно. Но это противоречит ранее установленной истинности этого высказывания.
Таким образом, сделанное допущение приводит к противоречию.
Следовательно, допущение неверно, а верно доказываемое утверждение.

Задание 1.10. (1.36).
Докажите, что справедливо следующее логическое следование, руководствуясь определением этого понятия: $P\,Q \vee R \models P \vee (Q \rightarrow R)$.
Выясните, будут ли верны обратные следования, то есть будет ли формула, стоящая слева, логическим следствием формулы, стоящей справа.
Решение:
Составим таблицу истинности для формул $P\,Q \vee R$ и $P \vee (Q \rightarrow R)$, участвующих в отношении следования:

P	Q	R	P·Q	P·QvR	Q→R	Pv(Q→R)
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1
				(*)		(**)

Последовательный просмотр по строкам столбцов (*) и (**) показывает, что как только в какой-либо строке столбца (*) появляется 1, так сейчас же в этой строке и в столбце (**) обнаруживается 1. Значит, требуемое логическое следование действительно выполняется.
Обратное же следование неверно, поскольку, например, в первой же строке (т.е. при P=0, Q=0, R=0) формула $P \vee (Q \rightarrow R)$ принимает значение 1 (

столбец (**)), а формула $P \cdot Q \vee R$ тем не менее принимает значение 0 (столбец (*)).

Задание 1.11. (1. 37).

Для следующих формул выясните, будет ли какая-либо из них логическим следствием другой:

а) $P \cdot Q \to R$, $(P \vee Q) \to R$;

б) $P \cdot Q \to R$, $P \vee (Q \to R)$.

Решение:

а) Составим таблицу истинности данных формул:

P	Q	R	P·Q	P·Q → R	P v Q	(PvQ)→R
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1
				(*)		(**)

Сопоставляя столбцы (*) и (**), видим, что во всей строке, в которой в столбце (**) стоит 1, в столбце (*) так же стоит 1, но не наоборот (например, третья строка). Это означает, что первая данная формула является логическим следствием второй, но вторая, в свою очередь, не является логическим следствием первой.

б) Составим таблицу истинности данных формул:

P	Q	R	P·Q	P·Q → R	P → Q	Pv(Q→R)
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1
				(*)		(**)

Сравнивая столбцы значений данных формул, видим, что в третьей строке первая формула принимает значение 1, а вторая – хначение 0, в то время как в седьмой строке вторая формула принимает значение 1 а первая 0. Следовательно, ни одна формула из двух данных не является логическим следствием другой.

Задание 1. 12. (1. 38.)

Пользуясь определением понятия логического следствия, вясните, справедливы ли следующие логические следования:

а) $P \cdot Q$, $\neg R \rightarrow \neg Q \mid = R$;

б) $P \cdot Q \rightarrow R$, $\neg R \mid = \neg Q$

Решение:

а) Составим сначала таблицу истинности для всех трёх данных формул $P \cdot Q$, $\neg R \rightarrow \neg Q$ и R , участвующих в рассматриваемом отношении:

P	Q	R	P·Q	¬ R	¬ Q	¬R→¬Q
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	1
		(***)	(*)			(**)

Отметим столбцы таблицы, отвечающие данным формулам $P \cdot Q$, $\neg R \rightarrow \neg Q$, R, символами (*), (**), (***) соответственно. Чтобы проверить выполнимость определения логического следования для данных формул, нужно найти все те строки таблицы, в которых в обоих столбцах (*) и (**) стоят единицы, и убедиться, что в каждой из этих строк в столбце (***) также стоит единица. Значит, доказываемое логическое следование справедливо (строки, в которых не в обоих столбцах (*) и (**) стоят единицы, автоматически удовлетворяют условию из определения логического следования: для них посылка этого условия, представляющего собой импликацию, ложна, а значит , сама импликация истинна).

Решение:

б) Составим таблицу истинности для всех трёх данных формул.

P	Q	R	P·Q	P·Q→R	¬ R	¬Q
0	0	0	0	1	1	1

0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	0	0	0

Найдём те строки, в котором обе посылки ($P\cdot Q) \to R$ и $\neg R$ принимают значение 1. Это 1-я, 3-я, 5-я строки. При этом в 1-й и 5-й строках формула $\neg Q$ также принимают значение 1, но в 3-й строке этого не происходит: $\neg Q$ принимает значение 0. Именно здесь « проваливается» определение логического следования, а значит, формула $\neg Q$ не является логическим следствием формул ($P \cdot Q)\to R$ и $\neg R$

Задание 1.13. (1.40.)

Методом от противного выясните, верно ли следующее логическое следование: $F\to G$, $K\to KH$, $H \vee \neg G \mid = F \to \neg K$

Решение:

Допустим, что данное логическое следование не выполняется, то есть существуют такие конкретные высказывания, которые превращают все формулы-посылки в истинные высказывания, а формулу-заключение $F\to\neg K$ - в ложное. Тогда из $F\to\neg K=0$ следует, что $F=1$ и $\neg K=0$, то есть $K=1$. Из $F\to G=1$ и $F=1$ следует, что $G=1$. Далее, из $H\vee\neg G=1$ и $G=1$ заключаем, что $H=1$, то есть $\neg H=0$. Наконец из $K\to\neg H=1$ и $\neg H=0$ получаем $K=0$. Пришли к противоречию. Следовательно, формула $F\to\neg K$ не может превращаться в ложное высказывание, если все формулы $F\to G$, $K\to\neg H$, $H\vee\neg G$ превратились в истинные высказывания. Это означает, что рассматриваемое логическое следование верно.

Задание 1.14

Докажите, что формула $P\cdot Q\to((R\vee Q)\to(Q\cdot\bar{Q}))$ выполнима, не составляя для неё таблицу истинности, а указав какие-нибудь значения входящих в неё пропозициональных переменных, при которых эта формула обращается в истинное высказывание.

Решение:

Заключение второй импликации есть тождественно ложная формула. Поэтому если посылка $R\vee Q$ второй импликации превратится при некоторой подстановке в ложное высказывание, то эта импликация станет истинным высказыванием и, следовательно, вся данная импликация превратится в истинное высказывание независимо от того, в какое высказывание обратится посылка P·Q всей данной импликации. Посылка RvQ второй импликации обращается в ложное высказывание, когда вместо переменных R и Q подставляется ложные высказывания. Итак, данная формула выполнима, поскольку она обращается в истинное высказывание, если вместо R и Q подставить ложные высказывания, а вместо P – произвольное высказывание (его истинностное значение в данном случае не повлияет на истинностное значение всего высказывания).

Задание 1.15.

Докажите, что формула (X v Y) → ((¬X ^ Y) v (X ^ ¬Y)) опровержима, не составляя для неё таблицу истинности, а указав какие-нибудь значения входящих в неё пропозициональных переменных, при которых эта формула обращается в ложное высказывание.

Решение:

Импликация ложна лишь в одном случае: когда её посылка истинна, а следствие ложно. Следствием данной импликации является дизъюнкция, которая ложна тогда и только тогда, когда оба её слагаемых ложны. Формула обратится в ложное высказывание, если найдутся такие высказывания A и B , что высказывание A v B истинно, а оба высказывания ¬A ^ B и A ^ ¬B ложны. Если высказывания A и B имеют разные истинностные значения, то высказывания ¬A^B и A^¬B не могут быть ложны оба. Поэтому A и B либо оба истинны, либо оба ложны. Но если A и B оба ложны, то высказывание A vB ложно, что нас не устраивает. Следовательно, A и B должны быть оба истинны. Итак,мы доказали, что данная формула превращается в ложное высказывание в том и только в том одном случае,

Занятие № 2.
Логика предикатов. Логическое следование.

Логическое следование. Высказывательная форма $Ф_2$ следует из высказывательной формы $Ф_1$, если импликация $Ф_1 \to Ф_2$ обращается в истинное высказывание при любых наборах значений переменных входящих в неё. Формула $Ф_2$ называется логическим следствием формулы $Ф_1$, если при всякой интерпретации, при которой $Ф_1$ превращается в тождественно истинный предикат, формула $Ф_2$ тоже тождественно истинный предикат. Обозначение логического следования $Ф_1 \Rightarrow Ф_2$ или $Ф_1 \models Ф_2$.

Две формулы равносильны тогда, и только тогда, когда каждая их них является логическим следствием другой $\lambda\,[F]$ - логическое значение формулы F.

Равносильности логики предикатов.

1.	$\exists x \exists y Q(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x Q(x, y)$	Правила перестановки	1′	$\forall x \forall y Q(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x Q(x, y)$

2.	$\exists x \forall y Q(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x Q(x, y)$	одноимённых кванторов		
3.	$\exists x F(x) \Leftrightarrow \forall x F(x)$	Перенос отрицания с квантора на предикат	3′	$\forall x F(x) \Leftrightarrow \exists x F(x)$
			4′	$\forall x F(x) \Leftrightarrow \exists x F(x)$ $\forall x F(x) \Leftrightarrow \exists x F(x)$
4.	$\exists x F(x) \Leftrightarrow \forall x F(x)$			
5.	$\exists x(F(x) \vee \Phi(x)) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists x F(x) \vee \exists x \Phi(x)$	Правила дистрибутив-ности кванторов	5′	$\forall x(F(x) \wedge \Phi(x)) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall x \Phi(x)$
6.	$\exists x(F(x) \wedge \Phi(x)) \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists x F(x) \wedge \exists x$ ¯‛x̀		6′	$\forall$õF(õ) $\vee$ $\forall$õÔ(õ)$\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\forall$õ(F(x) $\vee$Ô(õ))
7.	$\exists x(M \wedge F(x)) \Leftrightarrow M \wedge \exists x F(x)$		7′	$\forall x(M \wedge F(x)) \Leftrightarrow M \wedge \forall x F(x)$
8.	$\exists x(M \vee F(x)) \Rightarrow M \vee \exists x F(x)$		8′	$\forall x(M \vee F(x)) \Rightarrow M \vee \forall x F(x)$
9.	$\exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x P(x)$		9′	$\forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x P(x)$

Нормальные формы логики предикатов.

Приведённой называется формула, содержащая в качестве логических символов только стандартный базис : ¬ (¯), ^, v, где символ ¬ встречается только перед элементарными (автомарными) подформулами.

Нормальной называется приведённая формула, если она содержит все символы кванторов впереди или не содержит кванторов вообще (то есть логические символы и символы предикатов стоят в области действия каждого квантора).

Формула А логики предикатов задана в предваренной (пренексной) нормальной форме, если она имеет вид $Q_1 X_1 \ldots Q_n X_n$ B ($x_1 \ldots x_n$), где Q_1 – квантор. $\exists$ или $\forall$, а формула B ($x_1 \ldots x_n$) не содержит кванторов и приведена к КНФ.

Скулемовской называется такая пренексная форма, которая содержит только квантор $\forall$.

Доказано, что любую формулу логики предикатов можно привести к предваренной нормальной форме.

Алгоритм:

1) исключить все вхождения связок ↔ ,→ с помощью эквивалентных преобразований снятие импликации (13) $a \to b = \bar{a} \vee b$ и снятие эквиваленции (14) $a \sim b = a\, b \vee \bar{a}\, b$;

2) перенести все вхождения символа отрицания с квантора на предикат с помощью эквивалентных преобразований 3, 3′, 4 , 4 , а так же законов де Моргана и др. ;
3) вынести все кванторы из формул в их начало, за скобки, с помощью эквивалентных преобразований 7, 7′;
4) исключить кванторы существования, а переменные, связанные этими кванторами, заменить скулемовскими формами;
5) в стандартной форме все кванторы общности перенести в начало формулы, область действия каждого из них включить в формулу, так как кванторы больше не несут никакой информации ,то их опустить;
6) формулу привести к КНФ с помощью эквивалентных преобразований;
7) знаки конъюнкции исключить, тогда формулы распадаются на множество дизъюнктов.
Клаузальной нормальной формой (клауза – умозаключение) называется КНФ формулы логики предикатов.
Формула F в логике предикатов называется выполнимой (опровержимой) на множестве М, если хотя бы при одной подстановке вместо предикатных переменных конкретных предикатов, заданных на этом множестве М, она превращается в выполнимый (опровержимый) предикат.
Формула F в логике предикатов называется общезначимой или тавтологией, если она тождественно истинна в любой интерпретации, то есть при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на всевозможных множествах. Обозначается тавтология символом l=F.

Упражнения.

Задание 2.1.
На множестве М $\{2, 3, 4, 6, 8\}$:
а) выпишите бинарные отношения, соответствующие предикату Р «$x^2 > 3y$» ;
б) составьте таблицу истинности для этого предиката.
Решение:
а) бинарные отношения, соответствующие предикатами Р, имеют вид:
$2^2 > 3\cdot 2$, $3^2 > 3\cdot 2$, $4^2 > 3\cdot 2$, $6^2 > 3\cdot 2$
$2^2 > 3\cdot 3$, $3^2 > 3\cdot 3$, $4^2 > 3\cdot 3$, $6^2 > 3\cdot 3$
$2^2 > 3\cdot 4$, $3^2 > 3\cdot 4$, $4^2 > 3\cdot 4$, $6^2 > 3\cdot 4$
$2^2 > 3\cdot 6$, $2^2 > 3\cdot 6$, $2^2 > 3\cdot 6$, $2^2 > 3\cdot 6$
Решение:
б) Таблица истинности, соответствующая предикатам, имеет вид:

ху	2	3	4	6
2	л	л	л	л
3	и	л	л	л

4	и	и	и	л
6	и	и	и	и

Задание 2.2.

Выполните задание по образцу задания 2.1.

На множестве M = $\{1, 3, 5, 7\}$:

а) выпишите бинарные отношения, соответствующие заданным предикатам P;

б) составьте таблицу истинности для этих предикатов:

а) « $x = y$ » ; е) « $x \neq y$ » ;

б) « $x > y$ » ; ж) « x и y – взаимно простые числа» ;

в) « $x < y$ » ; з) « x делитель y» ;

г) « $x \leq y$ » ; и) « x кратно y» ;

д) « $x \geq y$» ; к) « (x-y) - простое число» .

Задание 2.3.

Докажите, что заданные пары формул логики предикатов равносильны между собой на одноэлементном множестве. Придумайте словестную интерпретацию этих формул:

$\exists x\,(P(x) \to P(y))$ и $\exists x\,(P(x)) \to P(y)$).

Решение:

Пусть предикаты заданы на одноэлементном множестве $\{a\}$. На этом множестве существуют только два предиката $A_0(x)$ и $A_1(x)$, причём $A_1(a) = 1$ и $A_0(a) = 0$.

Задание содержит две переменные: переменная x – связанная (предикатом существования), а переменная y – свободная. Составим таблицу истинности для этой формулы.

P	y	$\exists x(P(x) \to P(y))$	$\exists x P(x)$	$P(y)$	$\exists x P(x) \to P(y)$
A_0	a	1	0	0	1
A_1	a	1	1	1	1

Подставляя в первую формулу A_0 получаем высказывание $\exists x(A_0(x) \to A_0(y))$.На одноэлементном множестве $\{a\}$ это высказывание истинно, так как тождественно истинен предикат $A_0(x) \to A_0(y)$.

Для второй формулы сначала найдём значения высказывания $\exists x P(x)$. В первой строке имеем $\exists x A_0(x)$ ложное высказывание, во второй $\exists x A_1(x)$ – истинное. Аналогично находим значения P(y) и подставляя их во вторую формулу получаем результат. В результате обе формулы тождественно истинны на одноэлементном множестве $\{a\}$.

Задание 2.4.

Докажите, что следующие формулы являются тавтологиями предикатов:

а) $(\forall x)\ (P(x) \to Q) \leftrightarrow ((\exists x)\ (P(x)) \to Q)$;
б) $(\forall x)\ (P(x)) \to (A\,x)\ (P(x) \vee Q(x))$;
Решение:.
а) Отметим, что для предикатной переменной Q в формуле $(\forall x)\ (P(x) \to Q) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow ((\exists x)\ (P(x)) \to Q)$; не указано число переменных, так как она может быть не только 0-местной, но и любой n – местной.
Важно лишь, чтобы в неё не входила предметная переменная x. Пусть Q есть $Q(y_1 \ldots y_n)$. Будем считать для краткости , что Q есть предикатная переменная Q (y).
Предположим, что данная формула не является тавтологией. Тогда существуют такие конкретные предикаты A(x) и B(y), определённые на множествах M и M_1 соответственно, что предикат (от y) $(\forall x)\ (A(x) \to B(y)) \leftrightarrow (\exists x)\ (A(x) \to B(y))$ опровержим, то есть обращается в ложное высказывание при подстановке вместо предметной переменной y некоторого конкретного предмета b из $_1M$:

$\lambda\ [(\forall x)(A(x) \to B(b)) \leftrightarrow ((\exists x)(A(x)) \to B(b))] = 0$.
Эта эквивалентность ложна, если ее члены принимают разные значения истинности, т.е. могут представиться две возможности: первая −

$\lambda\ [(\forall x)(A(x) \to B(b))] = 1$ (1),

$\lambda\ [(\exists x)(A(x)) \to B(b)] = 0$ (2) и
вторая −

$\lambda\ [(\forall x)(A(x) \to B(b))] = 0$ (3),

$\lambda\ [(\exists x)(A(x)) \to B(b)] = 1$ (4).
Рассмотрим первую возможность. Из (2) по определению импликации имеем

$\lambda\ [(\exists x)(A(x))] = 1$ (5) и $\lambda\ [B(b)] = 0$ (6). Далее, из (5) по определению квантора существования заключаем, что предикат $A(x)$ выполним, т.е. $\lambda\ [A(a)] = 1$ (7) для некоторого $a \in M$.

В соотношении (1) по определению квантора общности предикат $A(x) \to B(b)$ − тождественно истинен. В частности, если вместо предметной переменной x подставить $a \in M$, то получим истинное высказывание $\lambda\ [A(a) \to B(b)] = 1$.
Но, учитывая (6) и (7), получаем $\lambda\ [A(a) \to B(b)] = \lambda\ [A(a)] \to \lambda\ [B(b)] = 1 \to 0 = 0$ −
--противоречие.
Рассмотрим вторую возможность, выраженную в соотношениях (3), (4). Из (3), на основании определения квантора общности, следует, что предикат $A(x) \to B(b)$ опровержим, т.е. $\lambda\ [A(a) \to B(b)] = 0$ для некоторого $a \in M$. Тогда по определению импликации $\lambda\ [A(a)] = 1$, $\lambda\ [B(b)] = 0$ (8). Отсюда и из соотношения (4) заключаем, что

$\lambda\ [(\exists x)(A(x))] = 0$. Последнее означает тождественную ложность предиката $A(x)$. В частности, для $a \in M$ имеем $\lambda\ [A(a)] = 0$, что противоречит первому из соотношений (8).
Итак, в каждом случае приходим к противоречию, доказывающему невозможность сделанного предположения. Следовательно, данная формула – тавтология.

б) Предположим, что формула $(\forall x)(P(x)) \to (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ не является тавтологией. Тогда существуют такие предикаты $A(x)$ и $B(x)$, определенные на

множестве M, что высказывание $(\forall x)(A(x)) \to (\forall x)(A(x) \vee B(x))$ ложно.
Импликация ложна, если и только если λ [$(\forall x)(A(x))$] =1 (1) и
λ [$(\forall x)(A(x) \vee B(x))$] = 0 (2).
Из (2) по определению квантора общности следует, что предикат
$A(x) \vee B(x)$ опровержим, т.е. найдется такое предмет $a \in M$, для которого
λ [$A(a) \vee B(a)$] = 0, т.е. λ [$A(a)$] = 0 и λ [$B(a)$]= 0.
Но утверждение λ [$A(a)$] = 0 противоречит (1), так как из него по определению квантора общности вытекает, что предикат $A(x)$ тождественно истинный, т.е. ни при каком $a \in M$ не превращается в ложное высказывание.
Следовательно, данная формула – тавтология.

Задание 2.5.
Выясните, будут ли выполняться в логике предикатов следующие логические следования:
а) $(\forall x)(S(x) \to \neg P(x)) \models (\exists x)(P(x) \wedge \neg S(x))$;
б) $(\forall x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \models (\exists x)(Q(x) \to P(x))$.
Решение:
а) Предположим, что найдутся такие конкретные предикаты $A(x)$ и $B(x)$, заданные над конкретным множеством M, что λ [$(\forall x)(B(x) \to \neg A(x))$] =1 (1),
а λ [$(\exists x)(A(x) \wedge \neg B(x))$] = 0 (2).
Из (1) по определению квантора общности следует, что λ [$B(a) \to \neg A(a))$] =1 (3) для любого предмета, $a \in M$. Из (2) по определению квантора существования следует, что λ [$A(b) \wedge \neg B(b))$] = 0 (4) для некоторого предмета $b \in M$.
Отсюда видно, что если предикаты $A(x)$ и $B(x)$ взять такими, что

$$\lambda\,[\,\mathrm{B}\,(\mathrm{x})\,] = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathrm{x} = b \\ 0, & \text{если } \mathrm{x} \in \mathrm{M}\ \{b\} \end{cases}$$

(λ [$A(b)$] = 0 и λ [$A(x)$] произвольно, если $x \neq b$), то противоречия не получится, соотношения (3) и (4) будут выполняться, вместе с ними будут выполняться соотношения (1) и (2), которые и будут говорить о том, что рассматриваемое следование неверно.
б) Решение:
Допустим, что найдутся такие конкретные предикаты $A(x)$ и $B(x)$, которые заданы над конкретным множеством M, что λ [$(\forall x)(A(x) \leftrightarrow B(x))$] =1 (1), а
λ [$(\exists x)(A(x) \to B(x))$] = 0 (2). Из (1) по определению квантора общности следует, что λ [$A(a) \leftrightarrow B(a))$] =1 (3) для любого предмета $a \in M$. Из (2) по определению квантора существования следует, что λ [$A(b) \to B(b)$] = 0 (4) для некоторого предмета $b \in M$.

Тогда из (4) следует, что $\lambda\ [\ A(b)\ ] = 1$, а $\lambda\ [\ B(b)\ ] = 0$. Два последних соотношения противоречат соотношению (3). Значит, сделанное допущение неверно и рассматриваемое следование справедливо.

Раздел 2.
Формальные теории

Занятие № 3. Аксиоматические системы. Формальный вывод. Формальная аксиоматическая теория.

Пусть задано множество $f = \langle f1, f2, \dots, fn \rangle \in Fn$
– набор формул и правило вывода R. Если существует $Rl \in R$, такое, что $(\langle f1, f2, \dots, fn \rangle, g) \in Rl$, то g называется **непосредственным следствием** формул $f1, f2, \dots, fn$ (безотносительно одного определенного правила вывода), что обозначается $f1, f2, \dots, fn \models g$ или $\frac{f1, f1, \dots, fn.}{g}$

Формула h называется **выводимой** из формул $\{f1, f2, \dots, fn\} = \Gamma$ или **следствием** формул Γ, если существует кортеж формул, где каждая формула является либо *аксиомой* теории T, либо *исходной формулой*, либо *непосредственно выводимой* (непосредственным следствием) из предыдущих.

Набор $\{f1, f2, \dots, fn\}$ называется **гипотезами** или **посылками**, что обозначается: $\Gamma \vdash h$.

Секвенция – есть **вывод** или **доказательство** формулы $f1, f2, \dots, fn \vdash h$, если $\Gamma \models h$, то $\Gamma \vdash h$.

Формула h – **теорема** теории T, если существует вывод, в котором последней формулой является h, т.е., если $\Gamma = \varnothing$ и $\Gamma \vdash h$ и формула является следствием только аксиом.

Вместо записи $\varnothing \vdash h$ обычно используют $\vdash h$.

Формула $f \in F$ формальной теории $T = \langle A, F, P, R \rangle$ называется **общезначимой** (или **тавтологией**), если она выполняется в *любой* интерпретации, и **противоречивой**, если в любой интерпретации ее образ ложен.

Упражнения

Задание 3.4. Выполните в символах арифметики Пеано (задание 3.4.) примеры и
проверьте результат в арабской системе счисления.
а) 4+7 б) 6+3 в) 8+5 г) 9+2 д) 7+8
е) 5+9 ж) 9+3 з) 6+5 и) 8+4 к) 9+6

Задание 3.5. Выполните в символах арифметики Пеано (задание 3.4.) примеры и
проверьте результат в арабской системе счисления.
а) $4 \cdot 7$ б) $6 \cdot 3$ в) $8 \cdot 5$ г) $9 \cdot 2$ д) $7 \cdot 8$
е) $5 \cdot 9$ ж) $9 \cdot 3$ з) $6 \cdot 5$ и) $8 \cdot 4$ к) $9 \cdot 6$

Занятие №4. Исчисление высказываний

Логическое следование. Пусть $A1, A2, \ldots, An, B$ – формулы исчисления высказываний
(*ИВ*). Формула B называется **логическим следствием** формул $A1, A2, \ldots, An$ тогда, и только тогда, когда истинна конъюнкция формул $A_{1,}\ A_{2,}\ \ldots\ , An.$, что обозначается $A1, A2, \ldots, An \Rightarrow B$.
Секвенцией называется формула вида $A \vdash B$, что читается: «B выводимо из A».
Формула A **выводима** из формул $A1, A2, \ldots, An$, если существует последовательность формул, в которой любая формула есть либо *аксиома*, либо принадлежит списку формул $A1, A2, \ldots, An$, называемых **гипотезами (Г)**, либо получается из предыдущих по правилу вывода *mp*. Обозначение такой секвенции: $A1, A2, \ldots, An \vdash A$.
Секвенция $\Gamma \vdash A$ означает, что формула A **выводима** из Г. Выводимость формулы A из пустого множества аксиом $\varnothing$ равносильна тому, что A – **теорема** *ИВ*, т.е. доказуема.
Обозначение такой (пустой) секвенции: $\vdash A$, что читается: «формула A выводима».

Некоторые *теоремы ИВ*:
***T*1)** $\vdash A \to A$ –рефлексивность импликации;
***T*2)** $A \vdash B \to A$ – введение импликации;
***T*3)** $\bar{A}, A \vdash B \Leftrightarrow \bar{A} \vdash (A \to B)$ – **теорема о дедукции –** связь между $\vdash$ и $\to$**;**
***T*4)** $A \vdash B \Leftrightarrow\ \vdash A \to B$– **следствие из теоремы дедукции** (при $\Gamma = \varnothing$)
***T*5)** $(\Gamma, A \vdash B$ и $\Gamma, A \vdash B\ ) \Rightarrow (\Gamma \to A)$
***T*6)** $A \to B, B \to C \vdash A \to C$ – правило транзитивности (гипотетический силлогизм)
***T*7)** $A \to (B \to C), B \vdash A \to C$ – правило сечения
***T*8)** $\vdash A\ A \to$ удаление и ***T*8)** $\vdash A \to A$ введение двойного отрицания
***T*9)** $\vdash\ (\bar{B} \to \bar{A}) \to (A \to B)$ ***T*/9)** $(\bar{B} \to \bar{A}) \vdash (A \to B)$ противопоставление обратному
***T*10)** $((A \to B) \wedge \bar{B}) \to \bar{A}$ – силлогизм modus tollens
***T*11)** $(A \to B) \Leftrightarrow (A \wedge \bar{B}) \to \bar{A}$ или $(A \to B) \Leftrightarrow (A \wedge \bar{B}) \to B$.

Правила выводов:
1. Правило подстановки (*ms*)

Если E – выводимая формула, содержащая символ A (т.е. $E(A)$), то выводима формула $E(B)$, полученная из E заменой всех вхождений A на

произвольную формулу B: т.е. $\frac{E(A)}{E(B)}$

2. Правило *modus ponens* (*mp*). Если набор формул A,B,C является частным случаем набора формул A, $A\rightarrow B$, то формула C является **непосредственно выводимой** из формул A и B. Тогда теорему 2 о введении импликации можно сделать новым правилом вывода:
$A \models B\rightarrow A$ (читается: « $B\rightarrow A$ непосредственно выводима из A»).

Общие правила непосредственной выводимости |= и выводимости |– .

Правило 1. Общие свойства символа |= (|–):
П1a **:** при n>1 $A_1,A_2,\ldots,An \models A_1$; $A_1,A_2,\ldots,An \models A2, \ldots , A1,A2,\ldots,An \models An$ – из набора формул непосредственно выводима каждая;
П'$_b$: если $A_1, A_2, \ldots, A_n \mid = C$, то $A_1, A_2, \ldots, A_n , B_1 \ldots, B_m \mid = C$ - число гипотез можно увеличить;
П'$_c$: если при m>0 и n>0, то $A_1, A_2, \ldots, A_m \mid = B_1 \ldots, A_1, A_2, \ldots, A_m = B_n$ и $B_1 , B_2 \ldots, B_n \mid = C$, то справедлива транзитивность непосредственной выводимости: $A_1, A_2, \ldots, A_m \mid =C$.
Те же свойства справедливы для выводимости |--.

Правило 2. Введение и удаление логических знаков:
Пусть A,B,C – произвольные высказывания. Обозначим Ф – конечный список формул, быть может, пустой. Правила введения и удаления логических знаков представим в виде таблицы :

Таблица. Правила введения и удаления логических знаков.

Операция		Правила введения ПВі	Правила удаления ПУі
1.	→	(Ф,A|-B) <=>(Ф|-A→B)	A,A → B|-B
2.	^	A,B |- A ^B	A ^B |-A,A ^B|-B
3.	˅	A|-A˅B	Если Ф,A|-C и Ф,B|-C, то Ф,A ˅B|-C
4.	¬	ЕслиФ,A|-B и Ф,A|-$\bar{B}$,то Ф|=$\bar{A}$	A,$\bar{A}$|-B (слабое удаление)
5.	≡	A→B, B→A |-A ≡B	A≡B |-A→B, A ≡B|-B→A

Правило 3 подстановки вместо элементарных формул (**П**$_3$):
Пусть B – некоторая формула, в которую входят элементарные формулы $a_1 ,\ldots a_n$; B' - формула, полученная из B одновременной подстановкой формул $A_1, \ldots , A_n$, вместо $a_1,\ldots a_n$. Тогда, если |– B, то |– B'.

Правило 4 о замене (**П**$_4$):
Пусть C_a – формула, содержащее в качестве своей части формулу A, а $C_в$ – формула, полученная из A заменой A на B. Тогда, если $|\!- C_a$, то $|\!- C_в$.
Логическое следование есть конечная алгоритмическая операция в отличие от логической выводимости.

противоречивое множество формул, то его обозначают Г |– .
Теоремами теории *Т* являются тавтологии, т.е. общезначимые формулы, и только они: $|\!- A \Leftrightarrow A$ – тавтология.

Метод резолюций в исчислении высказываний. Выводимость формулы *В* из множества посылок F_1, F_2, …, F_n равносильна доказательству теоремы
$|\!- (F_1 \wedge F_2 \wedge\ldots\wedge F_n \to B)$, где |– означает «верно, что *В* выводимо из $F_1 \wedge F_2 \wedge\ldots\wedge F_n$ » .
Действительно, $|\!- (F_1 \wedge F_2 \wedge\ldots\wedge F_n \to B) = |\!- F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \vee B = |\!- F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \overline{B}$, значит, заключение *В* истинно тогда и только тогда, когда формула ложна, т.е. $\lambda\, (F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \overline{B}) = 0$

Упражнения

Задание 4.1.
Докажите секвенцию и « приведение к абсурду» : $(\bar{A} \to \overline{B}) \wedge (\bar{A} \to \overline{B})\ |\!- A$, противоречию. Докажем секвенцию методом от противного, то есть сведением к противоречию. Доказательство проведём « пошагово», обосновывая каждый шаг:
1) $(\bar{A} \to B), \bar{A}\ |\!-\ B$ - правило вывода mp;
2) $(\bar{A} \to B), \bar{A}\ |\!-\ \bar{A}$ - $П'_a$: из набора формул непосредственно выводимая каждая;
3) $(\bar{A} \to B), \bar{A}\ |\!-\ \bar{A}\cdot B$ – $ПВ_2$: введение конъюнкции для шага 2) ;
4) $(\bar{A} \to B), \bar{A} \to \overline{B}$ введение → из конъюкции для шага 3) ;
5) $(\bar{A} \to B), (\bar{A} \to) \overline{B}\ |\!-\ A$ – L_3 : контрпозиция для шага 40 ;
6) $(\bar{A} \to B) \wedge (\bar{A} \to \overline{B})\ |\!-\ A$ определение |-- .
Более привычен и понятен иной вид секвенции « приведение к абсурду» : если из А следует одновременно В и не-В, то А ложно : $A \to B, A \to \overline{B}\ |\!- \bar{A}$

Задание 4.2.
Найдите все не равносильные между собой и не тождественно истинные формулы алгебры высказываний, являющиеся логическими следствиями следующей формулы (посылок) $X \to Y \vee Z)$ и $Z \to Y$
Решение.

Составляем конъюнкцию посылок и равносильными преобразованиями приводим её к СКН –форме : $(X \to (Y \vee Z)) (Z \to Y) \equiv (\overline{X} \vee Y \vee Z) (\overline{Z} \vee Y) \equiv$
$\equiv (\overline{X} \vee Y \vee Z) (0 \vee \overline{Z} \vee Y) \equiv (\overline{X} \vee Y \vee Z) (X \overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \equiv (\overline{X} \vee Y \vee Z) (X \vee Y \vee \overline{Z}) (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z})$.
Логическими следствиями из данных посылок будут все совершённые дизъюнкты, входящие в полученную СКН-форму, а также всевозможные конъюнкции. Этих конъюнктивных одночленов по два , по три и т.д.
Выписываем получающиеся формулы, придав им более удобную равносильную форму :

$\overline{X} \vee Y \vee Z \equiv X \to (Y \vee Z)$ (первая посылка);
$X \vee Y \vee \overline{Z} \equiv Z \to (X \vee Z)$;
$\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z} \equiv (X Z) \to Y$;
$(X \vee Y \vee Z) (X \vee Y \vee \overline{Z}) \equiv (X \leftrightarrow Z) \vee Y$; ↕ ;
$(\overline{X} \vee Y \vee Z)(\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \equiv (\overline{X} \vee Y) \vee Z \overline{Z} \equiv \overline{X} \vee Y \vee 0 \equiv \overline{X} \vee Y \equiv X \to Y$;
$(\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z})(\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \equiv Z \to Y$ (вторая посылка) ;
$(\overline{X} \vee Y \vee Z) (X \vee Y \vee \overline{Z}) (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \equiv(X \to(Y \vee Z)) (Z \to Y) \equiv (X \vee Z) \to X$

Задание 4.3. (8.1.)

Среди следующих формул укажите те, которые являются аксиомами :
а) $(F \to ((F \to F) \to F)) \to ((F \to (F \to F)) \to (F \to F))$;
б) $F \to ((\overline{F} \to G) \to F)$;
в) $(G \to H) \to (F \to (G \to H))$.
Решение:
а) Аксиома, получающаяся из схемы аксиом (P_2), если в качестве формулы A взять F, в качестве B взять $F \to F$, а в качестве C взять F.
б) Аксиома (P_1), если взять $A \equiv F$, $B \equiv \overline{F} \to G$.
В) Аксиома (P_3),если взять $A \equiv F$, $B \equiv \overline{G}$.

Задание 4.4. (8.3.)

Выясните, является ли данная последовательность формул выводом из аксиом. Если является. То обоснуйте каждый шаг построения этой последовательности. Если не является, то докажите это.
а) (1) $G \to (F \to G)$.
(2) $(G \to (F \to G)) \to (G \to (G \to (F \to G)))$.
(3) $G \to (G \to (F \to G))$.
б) (1) $(\overline{G} \to \overline{F}) \to ((\overline{G} \to F) \to G)$.
(2) $\overline{F} \to (\overline{G} \to \overline{F})$.
(3) $\overline{F} \to ((\overline{G} \to F) \to G)$.
Решение:
а) Данная последовательность формул является выводом. Обоснуем это. Каждая из формул (1), (2) представляет собой аксиому (P_1). Формула (3) получена из (1) и (2) по правилу MP.
б) данная последовательность формул не является выводом. Покажем это. Хотя формулы (1) и (2) являются аксиомами ((P_2) и (P_1) соответственно),

формула (3) не является аксиомой и не может быть получена из (1) и (20 по правилу MP. Следовательно, раз имеется хотя бы один неверный шаг, то последовательность выводом не является.

Задание 4.5. (8.4 а)
Докажите , что формула F-F является теоремой формализованного исчисления высказываний, построив последовательность формул, являющуюся выводом данной формулы из аксиом.
Решение:
Таким выводом является, например, следующая последовательность формул:
(1) $(F\to((F\to F)\to F))\to((F\to(F\to F))\to(F\to F))$.
(2) $F\to((F\to F)\to F)$.
(3) $(F\to(F\to F))\to(F\to F)$.
(4) $F\to(F\to F)$.
(5) $F\to F$.
В самом деле, формула (1) представляет собой аксиому (P_2), в которой в качестве формул A и B взята формула F, а в качестве формулы C – формула $F\to F$. Формула (3) получена из формул (1) и (2) по правилу MP. Формула (4) есть аксиома (P_1).Наконец, формула (5) получена из формул (3) и (4) по правилу MP.

Задание 4.6. (8.8)
Выясните, является ли данная последовательность выводом из гипотез. Если да, то укажите, выводом из каких формул , и какой формулы является. Если нет, то объясните почему.

а) (1) $G\to H$;
(2) G ;
(3) H ;
(4) $H\to(F\to H)$;
(5) $F\to H$.

б) (1) $F\to G$;
(2) $F\to\overline{G}$;
(3) $(F\to G)\to((F\to\overline{G})\to\overline{F})$;
(4) $(F\to\overline{G})\to\overline{F}$;
(5) $\overline{F}$.

Решение:
а) Гипотезами здесь выступают формулы (1), (2). Формула (3) получена из (2), (1) по правилу MP. Таким образом имеем вывод формулы $A\to B$ из гипотез $B, B\to C$.
б) Формулы (1), (2) не являются аксиомами и потому должны быть приняты за гипотезы. Формула (3) лишь внешне похожа на аксиому (P_1), но не является ею. Формула (4) получена из (1). (3) по правилу MP. Формула (5) получена из (2). (4) по правилу MP. Таким образом, данная последовательность является выводом формулы (5) из формул (1), (2), (3), но не является выводом формулы (5) из формул (1), (2).

Задание 4.7. (8.9 и,1)
Докажите , что имеют место следующие выводимости, построив соответствующие выводы из гипотез:
а) $F\to G,\ G \to H \mid\text{-}F\to H$;
б) $F\to (G\to H),\ G \mid\text{-}F \to H$;
Решение:
а) Вывод секвенции $F\to G,\ G \to H \mid\text{-}F \to H$ с краткими пояснениями имеет вид: (1) $F\to G$ (гипотеза);
(2) $G\to H$ (гипотеза);
(3) $(G \to H) \to (F\to (G \to H))$ (P_1);
(4) $F\to (G \to H)$ (MP: (2), (3)) ;
(5) $(F\to (G\to H)) \to ((F\to G) \to (F\to H))$ (P_2);
(6) $(F\to G) \to (F\to H)$ (MP : (4), (5)) ;
(7) $F\to H$ (MP : (1), (6)).
(Обоснование этой выводимости опирается на теорему о дедукции).
Решение:
б) Приведём вывод секвенции: $F\to (G \to H), G \mid\text{-}F \to H$.
Обоснуйте каждый шаг этого вывода.
(1) $F\to (G\to H)$;
(2) $(F\to (G\to H))\to ((F\to G) \to (F\to H))$;
(3) $(F\to G)\to (F\to H)$;
(4) $G \to (F\to G$;
(5) G;
(6) $F \to G$;
(7) $F \to H$.

Задание 4.8. (8.10).
Докажите, что имеют место теорема $\mid\text{-}\dot{F}\to F$, обосновав возможность построения соответствующего вывода из гипотез.
Решение: Рассмотрим следующую последовательность формул:
(1) $(\overline{F} \to \overline{F}) \to ((\overline{F} \to \overline{F}) \to F)$;
(2) $\overline{F}\to \overline{F}$;
(3) $(\overline{F}\to \overline{F}) \to F$;
(4) $\overline{F} \to (\overline{F} \to \overline{F})$;
(5) $\overline{F} \to F$.
Формула (1) есть аксиома (P_3). Формула (2) есть доказанная ранее теорема (задача 4.9.а), вывод которой мы можем вставить в данную последовательность формул. Формула (3) может быть выведена из формул (1) и (2) в силу утверждения задачи 4.12 б или 8.9л. Этот вывод мы также могли поместить в данное доказательство. Формула (4) есть аксиома (P_1).
Наконец, формула (5) может быть выведена из формул (4) и (3) на основании задачи 4.12 а или 8.9 и, и этот вывод также можно включить в рассматриваемое доказательство. Итак, хотя мы и не в полном объёме провели доказательство данной теоремы, но её выводимость очевидна.

Задание 4.9. (8.13 а)
Докажите, что во всяком исчислении высказываний, в котором правилом вывода является правило МР ,и в котором справедлива теорема о дедукции, формула $F\to ((F \to G) \to G)$ будет теоремой (выводом из аксиом), каковы бы ни были аксиомы этого исчисления.
Решение:
Правило МР состоит в том, что $A, A\to B \vdash B$. Применив к этому утверждению дважды теорему о дедукции, получим сначала $F \vdash (F\to G) \to G$, а затем $\vdash F\to ((F\to G) \to G)$.

Задание 4.10. (8.15.а)
Используя теорему о дедукции, докажите, что формула $(F\to G) \to (\overline{G} \to \overline{F})$ является теоремой ФИВ.
Решение:
Покажем сначала, что $F\to G \vdash \overline{G} \to \overline{F}$, построив для этого соответствующий вывод:

(1) $F \to G$;
(2) $\overline{\overline{F}} \to F$;
(3) $\overline{\overline{F}} \to G$;
(4) $G \to \overline{\overline{G}}$;
(5) $\overline{\overline{F}} \to \overline{\overline{G}}$;
(6) $(\overline{\overline{F}}\to \overline{\overline{G}})\to (\overline{G}\to \overline{F})$;
(7) $\overline{G} \to \overline{F}$

Поясним: (1) – гипотеза; (2) есть теорема на основании задачи 4.15.(8.10 а). Формула (3) может быть выведена из (2), (1) на основании задачи 4.12 а (8.9 и) (свойство транзитивности) ; (4) есть терема в силу задачи 4.15 в ($8.10_{в}$). Формула (5) может быть выведена из (3). (4) на основании задачи 4.15 а (8.9 и). (6)– есть теорема « противопоставление обратному»; наконец, (7) получена из (5), (6) по МР. Итак, формула $\overline{G}\to \overline{F}$ действительно может быть выведена из $F\to G$. Применив к этой выводимости теорему о дедукции, получим требуемую теорему.

Задание 4.11. (8.17 а)
Используя теорему о дедукции, докажите, что справедлива секвенция
$F \wedge G \vdash F$ (при этом необходимые выводы отыщите в предыдущих задачах).
Решение:
Докажем секвенцию $F \wedge G \vdash F$. Согласно определению логической связки $\wedge$ требуется доказать следующую выводимость: $F \wedge \overline{G} \vdash F$. Строим вывод:

(1) $F \to \overline{G}$;
(2) $F \to \overline{G}\to (\overline{F} \to F\to \overline{G})$;
(3) $\overline{F} \to F\to \overline{G}$;
(4) $(\overline{F} \to F\to \overline{G}) \to ((\overline{F}\to (F\to \overline{G})) \to F)$;
(5) $(\overline{F} \to (F\to \overline{G})) \to F$;
(6) $\overline{F} \to (F\to \overline{G})$ F;
(7) F.

Для пояснения отметим лишь , что формула (6) является теоремой 8°, а следовательно, последовательность (1-7) превратится в вывод формулы F из гипотезы F→ $\bar{G}$, как только она будет пополнена доказательством формулы (6).

Задание 4.12. (8.20 г.)

Докажите, что справедливо производное правило вывода $\frac{\Gamma|-\Gamma\vee G;\Gamma,F|-H;\Gamma,G|-H}{\Gamma|-H}$, называемое правилом удаления дизъюнкции(Генцен), где Г – некоторое множество формул, возможно пустое.

Решение:

По теореме о дедукции из условия вытекает, что Г |-F→H и Г|-G→H. Далее по задаче 4.19_3 (8.17_3), можно увеличить число гипотез: F∨G, F→H, G→H|-H. Так как по условию ещё F|-F∨G, то по свойству выводимости ?, заключаем , что Г|-H.

Задание 4.13. Задача 1.

Проверим, правильно ли сделан вывод в умозаключении « Все студенты факультета информатики добросовестны в учёбе или талантливы».

Если они добросовестны в учёбе , то систематически готовятся к занятиям.

Поэтому, если студенты информатики не будут готовиться к занятиям, то они должны быть талантливы.

Решение:

Введём обозначения:

А : - « студенты – информатики талантливы».

В: - « студенты-информатики добросовестно относятся к учёбе».

С: - « систематически готовятся к занятиям»

Тогда данное умозаключение примет вид формулы:

(A v B), (B → C)=> ($\bar{C}$ → A) или $\frac{((A\vee B),(B\to C))}{\check{C}\to A}$ или (A vB) (B→C) => ($\bar{C}$→A)

Составим таблицу истинности для проверки справедливости этого умозаключения:

A	B	C	A v B	B → C	(A v B) (B →C)	$\bar{C}$	$\bar{C}$ → A	(A v B) (B →C) → ($\bar{C}$ → A)
1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1

0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	1	0	1

Строки последнего столбца дали ответ на вопрос: умозаключение истинно при любых значениях пропозициональных переменных A, B, C.
Формулу можно было упростить, используя тождество $p \to q = p \vee q$
Тогда $((A \vee B)(B \to C)) \to (\overline{C} \to A) = (A \vee B)(\overline{B} \vee C) \to (\overline{C} \vee A) =$

$= (\bar{A} \vee \overline{B})(\overline{B} \vee \overline{C}) \vee (C \vee A) = \bar{A} \vee \overline{B} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee C \vee A = \bar{A} \times \overline{B} \vee B\,\overline{C} \vee C \vee A =$

$= \bar{A} \times \overline{B} \vee \overline{B}\,\overline{C} \vee C \vee A = \overline{B} \vee B\,\overline{C} \vee C = \overline{B} \vee \overline{C} \vee C = 1$

Значит, вывод верен.

Задание 4.14. Задача 2.

Проверить методом резолюций вывод умозаключения: «Если институт приглашает на работу специалиста в области нанотехнологий, то институт считает это направление в науке приоритетным и развертывает работу по внедрению нанотехнологий в электронику или включает этот раздел в учебный процесс. Конкурирующий институт тоже приглашает на работу специалиста в области нанотехнологий. Значит, он развертывает работу по внедрению нанотехнологий в электронику или включает этот раздел в учебный процесс.

Введем обозначения:

A= «Институт приглашает на работу специалиста»,

B= «Институт считает это направление в науке приоритетным»,

C= «Институт развертывает работу по внедрению нанотехнологий в электронике» ,

D= «Институт включает этот раздел в учебный процесс».

Содержание высказывания может быть записано в формализованном виде с помощью формулы: $((A \to (B \wedge (C \vee D))) \wedge A) \wedge A) \to (C \vee D)$.

Решение:

Вывод истинности умозаключения в этой задаче можно проверить:

а) с помощью тождественных преобразований по известным законам алгебры логики;

б) применяя метод резолюций, доказать общезначимость формулы.

а) Проверим истинность умозаключения с помощью законов алгебры логики:

$((A\rightarrow(B \wedge (C \vee D))) \wedge A)\rightarrow(C \vee D)=(\bar{A} \vee B(C \vee D))A \vee (C \vee D)=(B(C \vee D))A \vee (C \vee D)=$
$=\bar{B} \vee \bar{C}\ \bar{D} \vee \bar{A} \vee C \vee D=\bar{B} \vee \bar{C} \vee \bar{D} \vee \bar{A} \vee C \vee D=1$

Полученная единица означает, что мы доказали истинность умозаключения.

б) Проверим истинность умозаключения с помощью метода резолюций и докажем общезначимость формулы. Для этого воспользуемся алгоритмом:
1) Сформулируем отрицание заключения: $C \vee D$.

2) Приведем все посылки и отрицание заключения к КНФ:

$((A\rightarrow(B \wedge (C \vee D))) \wedge A) \wedge A) \wedge \bar{C} \vee \bar{D}=(\bar{A} \vee (B \wedge (C \vee D))) \wedge A \wedge (\bar{C} \wedge \bar{D})=B \wedge (C \vee D) \wedge A \wedge (\bar{C} \wedge \bar{D})$.

3) Составим множество К из всех посылки и отрицание заключения:

$K = \{ A, B , C \vee D, \bar{C}, \bar{D} \}$.

4) Произведем анализ всех возможных пар множества К по методу резолюций. Для этого объединяем в пары дизъюнкты, содержащие контрарные литеры, используя логическую операцию дизъюнкция. При этом получаем новый дизъюнкт, который называют «резольвента»: $C \vee D \vee \bar{D}$. Исключив контрарные литеры, получим резольвенту: $C \vee D \vee \bar{D}= C$.

5) Включим полученную резольвенту во множество К:
$K =\{A, B , C, \bar{C} \}$. Перейдем к пункту 4.

6) Т.к. множество К содержит контрарные литеры, то их объединение в дизъюнкцию даст пустую резольвенту, т.е. умозаключение $C \vee D$– истинно.

Задание 4.15.

Решите задачи, установив, справедливы ли проведенные рассуждения.
а) (3.32.)
Я пойду или в кино на новую кинокомедию (A),
или на занятия по математической логике (B).
Если я пойду в кино на новую кинокомедию, то я от всей души посмеюсь (C).
Если я пойду на занятия по математической логике, то испытаю большое удовольствие от следования по путям логических рассуждений (D).
Следовательно, или я от всей души посмеюсь, или испытаю большое удовольствие от следования по путям логических рассуждений. Справедливо ли проведенное рассуждение?
Решение:

Учитывая символические обозначения высказываний, приведенные в условии, запишем посылки нашего рассуждения: $A \vee B$, $A \to C$, $B \to D$. Покажем, что для формул алгебры высказываний имеет место следующее логическое следование: $X \vee Y$, $X \to Z$, $Y \to W \models Z \vee W$, где X, Y, Z, W — пропозициональные переменные.

В самом деле, предположим, что это следование неверно, т.е. найдутся такие конкретные высказывания A_1, A_2, A_3, A_4, что $\lambda(A_1 \vee A_2) = 1$,

$\lambda(A_1 \to A_2)=1$, $\lambda(A_2 \to A_4) = 1$, но $\lambda(A_3 \vee A_4) = 0$.

Тогда из последнего равенства следует, что $\lambda(A_3) = 0$ и $\lambda(A_4) = 0$.
Далее, из $\lambda(A_1 \to A_3) = 1$ и $\lambda(A_3) = 0$ следует, что $\lambda(A_1) = 0$, а из $\lambda(A_2 \to A_4) = 0$ следует, что $\lambda(A_2) = 0$. Тогда $\lambda(A_1 \vee A_2) = \lambda(A_1) \vee \lambda(A_2) =$ $=0 \vee 0 = 0$, что противоречит предположению $\lambda(A_1 \vee A_2) = 1$.

Таким образом, проведенное в данной задаче рассуждение справедливо. К такому выводу можно прийти, если в доказанном логическом следствии выполнить подстановку: X=A, Y= B, Z= C, W= D.

Б) 3.35. Если я пойду завтра на первое занятие (A), то должен буду рано встать (B), а если я пойду вечером на дискотеку (C), то лягу спать поздно (D). Если я лягу спать поздно и встану рано, то буду вынужден довольствоваться пятью часами сна. Следует ли отсюда, что я должен или пропустить завтра занятие, или не ходить вечером на дискотеку

Решение:

Посылки запишем в символическом виде: $(A \to B) \wedge (C \to D), (D \wedge B) \to E, \neg E$. Необходимо выяснить, вытекает ли отсюда утверждение $\neg A \vee \neg C$.
Рассмотрим логический способ получения вывода.
Предположим, что высказывание $\neg A \vee \neg C$ ложно, в то время как все посылки истинны. Тогда $\lambda(\neg A \vee \neg C) = 0$, т. е. $\lambda(A) = 1$ и $\lambda(C) = 1$, в то время как $\lambda((A \to B) \wedge (C \to D)) = \lambda((D \wedge B) \to E) = \lambda(\neg E) = 1$. Из этих условий заключаем, что $\lambda(E) = 0$, а $\lambda(D \wedge B) = 0$. Следовательно, $\lambda(D) = 0$ или $\lambda(B) = 0$. Если $\lambda(D) = 0$, то $\lambda(C \to D) = \lambda(C) \to \lambda(D) = 1 \to 0 = 0$ и $\lambda((A \to B) \wedge (C \to D)) = 0$, что противоречит предположению.
Если же $\lambda(B) = 0$, то аналогично $\lambda(A \to B) = 0$ и $\lambda((A \to B) \wedge (C \to D)) = 0$, что снова противоречит предположению. Следовательно, не может быть ложно высказывание $\neg A \vee \neg C$, если все данные посылки истинны. Значит, вывод $\neg A \vee \neg C$ верен.

в) 3.36. Если будет холодно (A), то я надену теплое пальто (B), если рукав будет починен (C). Завтра будет холодно, а рукав не будет починен. Следует ли отсюда, что я не надену теплое пальто?

Решение.

Посылки нашего рассуждения символически записываются следующим образом: $A \to (\overline{N} \to B)$, $A \wedge \neg C$. Спрашивается: следует ли отсюда утверждение $\neg B$? Предположим, что высказывание $\neg B$ ложно, в то время как все посылки являются истинными высказываниями. Тогда $\lambda(\neg B) = 0$, а $\lambda(B) = 1$. Значит, первая посылка $A \to (C \to B)$ действительно истинна, а вторая будет истинной, если A истинно, а C ложно. Таким образом, ситуация, когда посылки все истинны, а высказывание $\neg B$ ложно, вполне возможна. Это означает, что высказывание $\neg B$ не следует из данных посылок.

г) «Если будет идти снег, машину трудно будет вести. Если трудно будет вести машину, то я опоздаю, если не выеду раньше. Идет снег. Вывод: я должен выехать раньше». Проанализируйте умозаключение и найдите пропущенное высказывание (пропущенную посылку).

Решение:

1) Чтобы восстановить в этой цепочке высказываний пропущенное высказывание, введем обозначения:

C – идет снег ;

T – трудно вести машину;

O – опоздаю;

P – выехать раньше, тогда $\dfrac{(C\to T),\left(T\to(\overline{P}\to O)\right),C}{P}$.

2) Запишем условия задачи с помощью логических операций $(C\to T)(T\to(\overline{P}\to O))C \models P$. В этой цепочке высказываний не хватает одной посылки.

3) Используем и здесь метод от противного. Докажем, что пропущена одна посылка, но при этом возьмем противоположный данному вывод $\dot{P}$. Тогда формула примет вид $(C\to T)(T\to(\overline{P}\to O))C \models P$

4) Упростим новую формулу:

$(C \to T)(T \to (\overline{P} \to O))C\,\overline{P} = (\overline{C} \vee T)(\overline{T} \vee (P \vee O))C\,\overline{P} = C\,\overline{P}T(\overline{T} \vee P \vee O)) = C\,\overline{P}TO$

Высказывание будет ложным, если будет ложным каждый из множителей, в частности, должно быть $\lambda(\overline{P})=0$, т.е. $\lambda(P)=1$ (выехать раньше). Но вывод будет верным, если действительно пойдет снег. Поэтому выехать раньше достаточно для неопоздания.

5) Для того, чтобы из этой цепочки высказываний сделать правильное и полное умозаключение, возьмем отрицание этого вывода:

$TC\overline{P}O = \overline{T} \vee \overline{C} \vee P \vee \bar{O}$. Любой член (составляющая) этой дизъюнкции может быть пропущенной посылкой. Соединим его с условием задачи и рассмотрим возможные варианты.

а) Пусть дополнительная посылка – $\overline{T}$, тогда $C \to T$, $T \to (\overline{P} \to O)$, C, $\overline{T}$. Но посылки $C \to T$, C, T – противоречивы, значит этот вариант неудачный:

б) $\overline{C}$ – аналогичный вывод.

в) P – выехал рано, но тогда все остальные посылки излишние, т.к. в этом случае опоздания не будет.

г) $\bar{O}$ – в соединении с первыми посылками появление этой посылки оправдано, т.к. нельзя опаздывать на работу («точность – вежливость королей»). Заметим, что посылку о том, что «опаздывать на работу нельзя» можно было найти и интуитивно.

Занятие 5. Исчисление предикатов.

Язык исчисления предикатов. Формальная теория S = (A,F,P,R) называется исчислением предикатов (точнее говоря, исчислением предикатов первого порядка), если заданы:

1-2. Алфавит, термы и формулы ИП описаны в лекции 2 (стр.12).

3. Аксиомы:

а) аксиомы исчисления высказываний:

P_1 : $(A \to (B \to A))$;

P_2 : $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

P_3 : $(\overline{B} \to \bar{A}) \to ((\overline{B} \to A) \to B))$;

б) кванторные:

P_4 : $\to \forall x\, A(x) \to A(y)$;

P_3 : $A(x) \to \exists y\, A (y)$.

4. Правила вывода.

R_1 : $\frac{A, A \to B}{B}$ modus ponens;

R_2 : $\frac{A \to B(x)}{A \to \ x\, B(x)}$ введите квантора общности;

R_3 : $\frac{A(x) \to B}{x\, A(x) \to B}$ введение квантора существования.

Теоремы ИП. К числу основных равносильностей логики предикатов относят:

T1°. $\forall x\, P(x) \Leftrightarrow \exists x\, P(x)$;

T2°. $\exists x\, P(x) \Leftrightarrow \forall x\, P(x)$;

T3°. $\forall x\, P(x) \Leftrightarrow \exists x\, P(x)$;

T4°. $\exists x\, P(x) \Leftrightarrow \forall x\, P(x)$;

T5°. $\forall x\, (P(x) \wedge Q (x)) \Leftrightarrow \forall x\, P(x) \wedge \forall x Q(x)$;

T6° $\exists x\, (P (x) \vee Q (x)) \Leftrightarrow \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$.

Для построения отрицания высказываний, содержащих квантор

$\frac{\text{общности}}{\text{существования}}$. достаточно заменить его квантором $\frac{\text{существования}}{\text{общности}}$ и взять отрицание выражения, на которое этот квантор был « навешан».
Для многоместных кванторов так же применяется это правило: осуществляется последовательный перенос отрицания с кванторного слова на предложение, стоящее за квантором, а сам квантор заменяют на двойственный.
Например, для формулы $\forall x\ \forall y\ \exists z\ (R(x,y,z))$ построим отрицание:
$\overline{\forall x\ \forall y\ \exists z\ (R(x,y,z))} \Leftrightarrow \exists x\ (\overline{\forall y\ \exists z\ (R(x,y,z))}) \Leftrightarrow \exists x\ \exists y\ (\overline{\exists z\ (R(x,y,z))})$
$\Leftrightarrow \exists x\ \exists y\ \forall z\ (\acute{R}(x,y,z))$.
Так как операции конъюнкции и дизъюнкции двойственны, то для сложных высказываний, состоящих из простых, разделённых операциями конъюнкции и дизъюнкции, отрицание строится по следующему правилу. Все кванторы $\exists$ заменяют на $\forall$, и наоборот, все связки и (^)заменяют на или (ᵛ) и наоборот, а затем берут отрицание утверждения.

Метод резолюций в логике предикатов.

Метод резолюций есть правило присоединения к рассуждению, в состав которого входят два утверждения A =>B, ¬A => C их следствия – утверждения B ᵛC.
В логике предикатов для применения метода резолюций необходимо убрать все кванторы. Для этого существуют два способа:
1) вынос всех кванторов общности за скобки;
2) приведение к скулемовской форме, т.е. исключение всех кванторов существования.
Отсюда метод резолюций в логике предикатов заключается в следующем:
Задача – доказать общезначимость формулы. Для этого надо:
1) перейти к формуле G = F и взять её отрицание;
2) исключить в G все кванторы существования;
3) вынести за скобки все кванторы общности, предварительно преобразовав связанные переменные с целью отличия их от свободных переменных и между собой; получим $G = \forall x\ \forall y \ldots \forall z\ \ H(x,y,\ldots z)$;
4) представить $H(x,y,\ldots z)$ в виде КНФ и применить к ней метод резолюций для высказываний.
Справедлив тезис Черча: « Любое математическое утверждение может быть записано на языке исчисления предикатов, а любое математическое доказательство можно провести в рамках исчисления предикатов».
Метод резолюций позволяет доказать тождественную истинность формулы исчисления предикатов с помощью алгоритма.
Пусть A – формула исчисления предикатов. Для доказательства её истинности достаточно доказать невыполнимость её отрицания ¬A согласно следующему алгоритму:
1) Найдём для ¬A предварённую форму A_1 .

2) Приведём безкванторную часть формулы A_1 к КНФ без одинаковых сомножителей и без повторяющихся элементарных формул в сомножителях.
3) Приведём полученную формулу к скулемовской форме S (исключив все кванторы существования), то есть к виду КНФ, в котором все C_1 – различные между собой дизъюнкты, не содержащие равных или противоположных литералов.
4) В последовательности C_1 …, C_r ищем такие дизъюнкты, из которых после замены некоторых предметных переменных какими-либо термами получаются дизъюнкты D_1 , D_2 с противоположными литералами.

Задание 5.1.

Проверьте методами логики предикатов справедливость вывода: « Все металлы (М) – плавятся (П). Цинк (Ц) – металл. Значит, цинк плавится».
Решение:
Формализация в логике предикатов имеет вид:
$\forall x$ (М (x) → П (x)) ^ $\forall x$ (Ц(x) →М(x))|- $\forall x$ (Ц(x) → П(x)).
Снятие квантора общности приведёт формулу к виду:
X (М (x) → П(x)) ^ (Ц (x) → М (x)). Тогда на основании транзитивности импликации имеем: (Ц (x) → М(x)), (М(x) → П (x)) |= Ц (x) → П(x).
Поэтому , вывод $\forall x$ (Ц(x) → П(x)) – обобщение по R_2 – верен.

Задание 5.2.

Найдите резольвенту дизъюнктов
C_1 =P(x) Q(f(x) ᵛR(y,(g (z)) и C_2 =R (x,y) ᵛ T(y) ᵛQ(x)
Решение:
1) Заменим в C_2 предметную переменную x на терм f(x), получим резольвенту P (x) ᵛ R (y, (g (z)) ᵛ R (f (x),y) ᵛ T (y).
20 Заменим в C_1 y на x, а в C_2 y на g(z) и получим ещё одну резольвенту P(x) ᵛ Q (f (x)) ᵛ T(g (z)) ᵛ Q (x).

Задание 5.3. (в)

Докажите, что следующие формулы являются теоремами формализованного исчисления предикатов, для чего постройте выводы этих формул из аксиомы: в) (∃x) (∃y) (F(x,y)) ↔(∃y)(∃x) (F(x,y)).
Решение:
в) Укажем последовательность шагов вывода:
(1) F(и,v)→(∃x)(F(x,y)) (аксиома (PA2)) ;
(2) F(и,v)→(∃y) (∃x)(F(x,y)) (аксиома (PA2));
(3) (∃v)(F(и,v)) →(∃y) (∃x)(F(x,y)) (∃ – правило : (2));
(4) (∃и)(∃v)(F(и,v)) →(∃y) (∃x)(F(x,y)) (∃ – правило (3)) ;
(5) (∃x) (∃y) (F(x,y)) → (∃y) (∃x)(F(x,y)) (переименование переменных);
(6) (∃y) (∃x)(F(x,y)) → (∃x) (∃y) (F(x,y)) (доказывается аналогично (5));

(7) $(\exists x)\,(\exists y)\,(F(x,y)) \leftrightarrow (\exists y)\,(\exists x)(F(x,y))$ (правило ^ -вв: (5), (6)).

Задание 5.4.(а)

Докажите, что следующие формулы являются теоремами формализованного исчисления предикатов, построив их выводы из аксиомы:

а) $(\exists x)\,(F(x)) \leftrightarrow \neg(\forall x)\,(\neg F(x))$.

Решение:

а) Вывод состоит из последовательности шагов:

(1) $(\forall x)\,(\neg F(x)) \to F(y)$ (аксиома PA1));

(2) $\neg\neg F(y) \to \neg\,(\forall x)\,(\neg F(x))$ (поучена из (1) по правилу ФИВ: $P\to Q \mid - \neg Q \to \neg P$);

(3) $F(y) \to\neg\neg F(y)$ (теорема ФИВ);

(4) $F9y) \to\neg\,(\forall x)\,(\to F(x))$ (получена из (3), (2) по правилу силлогизма из ФИВ);

(5) $(\exists x)\,(F(x))\to\neg\,(\forall x)\,(\neg F(x))$ ($\exists$ – правило : (4));

(6) $(\exists x)\,(F(x))\to\neg\,(\forall x)\,(\neg F(x))$ ($(\forall x)\,(\neg F(x))$ (переименование : (5));

(7) $F(y) \to (\exists x)\,(F(x))$ (аксиома (PA2));

(8) $\neg(\exists x)\,(F(x)) \to \neg F(y)$ (получена из (7) по правилу контрапозиции из ФИВ);

(9) $\neg(\exists x)\,(F(x)) \to (\forall y)\,(\neg F(y))$ ($\forall$ – правило (8));

(10) $\neg(\exists x)\,(F(x)) \to (\forall x)\,(\neg F(x))$ (переименование : (9));

(11) $\neg(\forall x)\,(\neg F(x)) \to \neg\neg(\exists x)\,(F(x))$ (получена из (10) по правилу контрапозиции);

(12) $\neg\neg(\exists x)\,(F(x)) \to (\exists x)\,(F(x))$ (теорема ФИВ : $\neg\neg P\to P$);

(13) $\neg(\forall x)\,(\neg F(x)) \to (\exists x)\,(F(x))$ (получена из (11), (12) по правилу ФИВ силлогизма);

(14) $(\exists x)\,(F(x)) \leftrightarrow\neg(\forall x)\,(\neg F(x))$ (правило ^ -вв: (6), (13)).

Задание 5.5.

Докажите, что в ФИВ справедливы следующие выводимости, построив выводы формул из соответствующих гипотез:

к) $(\forall x)\,(F(x) \leftrightarrow G(x)) \mid - (\forall x)\,(F(x)) \leftrightarrow (\forall x)\,(G(x))$.

Решение: к)

Вывод имеет следующий вид:

(1) $(\forall x)\,(F(x) \leftrightarrow G(x))$ (гипотеза);

(2) $F(y) \leftrightarrow G(y)$ (правило УКО: (1)) ;

(3) $F(y) \to G(y)$ (правило ^ -уд: (2));

(4) $G(y) \to F(y)$ (правило ^ - уд : (2)) ;

(5) $(\forall x)\,(F(x)) \to F(y)$ (аксиома (PA1));

(6) $(\forall x)\,(F(x)) \to G(y)$ 9 правило силлогизма: (5),(3));

(7) $(\forall x)\,(F(x)) \to(\forall y)\,(G(y))$ ($\forall$ - правило (6));

(8) $(\forall x)\,(F(x)) \to(\forall x)\,(G(x))$ (переименование : (7));

(9) $(\forall x)\,(G(x)) \to G(y)$ (аксиома (PA1));

(10) $(\forall x)\,(G(x)) \to F(y)$ (правило силлогизма : (6),(4) ;

(11) $(\forall x)\,(G(x)) \to(\forall y)\,(F(y))$ ($\forall$ правило (10);

(12) $(\forall x)\,(G(x)) \to(\forall x)\,(F(x))$ (переименование : (11));

(13) $((\forall x)\,(F(x)) \to(\forall x)\,(G(x)) \to [((\forall x)\,(G(x)) \to (\forall x)\,(F(x))\,) \to$
$\to((\forall x)\,(F(x)) \leftrightarrow ((\forall x)\,(G(x))\,)]$ (теорема ФИВ: $A \to(B\to(A\wedge B))$);

(14) $((\forall x)(G(x)) \to (\forall x)(F(x))) \to ((\forall x)(F(x)) \leftrightarrow (\forall x)(G(x)))$ (MP: (8),(13));
(15) $(\forall x)(F(x)) \leftrightarrow ((\forall x)(G(x))$ (MP: (12), (14).

Задание 5.6.
Если Γ,F(x) |-G, то Γ, (∃x) (F(x)) |-G при условии, что x не входит свободно ни в формулу G, ни в одну формулу Γ (правило УКС – удаления квантора существования).
Решение:
Укажем соответствующий вывод:
(1) Γ,F(x) |-G (условие);
(2) Γ |- F(x) → G (теорема о дедукции (1));
(3) F(x) → G |- (∃x) (F(x)) →G (∃- правило);
(4) Γ |- (∃x) (F(x)) →G (свойство выводимости: (2),(3)) ;
(5) Γ, (∃x) (F(x)) |- (∃x) (F(x)) →G (свойство выводимости : (4));
(6) Γ, (∃x) (F(x)) |- (∃x) (F(x)) (очевидно);
(7) (∃x) (F(x)) , (∃x) (F(x)) →G|-G (правило MP);
(8) Γ, (∃x) (F(x)) |-G (свойство выводимости : (5), (6), (7)).

Задание 5.7. (11.12).
Используя теорему о дедукции, докажите, что в ФИП справедлива теорема :
(∃x) (F(x) v G (x)) ⟺ ((∃x) (F(x) v (∃(x) (G (x)).
Решение.
Докажем сначала, что (∃x) (F(x) v G (x)) |- (∃x) (F(x)) v (∃(x) (G (x)):
(1) (F(y) |- (∃x) (F(x)) (правило ВКС);
(2) (∃x) (F(x)) |- (∃x) (F(x)) v (∃x) (G (x)) (правило v-вв);
(3) F(y) |- (∃x) (F(x)) v (∃x) (G (x)) (получена из 91),(2));
(4) G(y) |- (∃x) (G (x)) (правило ВКС);
(5) (∃x) (G (x)) |- (∃x) (F(x)) v (∃x) (G (x)) (правило v-вв);
(6) G (y) |- (∃x) (F(x)) v (∃x) (G (x)) (получаем из (4), (5));
(7) F(y) v G (y) |- (∃x) (F(x)) v (∃x) (G (x)) (правило v-уд: (3),(6);
(8) (∃x) (F(x) v G (x)) |- (∃x) (F(x)) v (∃x) (G (x)) (УКС: (7));
Следовательно по теореме о дедукции:
|- (∃x) (F(x) v (G (x)) → ((∃x) (F(x) v (∃x) (G (x))).
Теперь докажем, что
(∃x) (F(x)) v (∃x) (G(x)) |- (∃x) (F(x) v (G(x)):
(1) F(y) |-F(y) v G(y) (правило v-вв);
(2) F(y) v G(y) |- (∃x) (F(x) v (G (x)) (правило ВКС);
(3) F(y) |- (∃x) (F(x) v (G (x)) (получена из (1), (2));
(4) G(y) |- F(y) v (G (y)) (правило v-вв);
(5) G(y) |- (∃x) (F(x) v (G (x)) (получена из (4), (2));
(6) (∃x) (F(x)) |- (∃x) (F(x) v G(x)) (правило УКС: (3));
(7) (∃x) (G(x)) |- (∃x) (F(x) v (G(x)) (правило УКС: (5));
(8) (∃x) (F(x)) v (∃x) (G(x)) |- (∃x) (F(x) v G(x)) (правило v-уд: (6), (7)).

Следовательно, по теореме о дедукции:
$\vdash ((\exists x)(F(x)) \vee (\exists x)(G(x))) \rightarrow (\exists x)(F(x) \vee G(x))$.
Из теорем (*) и (**) по правилу ^ -вв получаем требуемую теорему.

Раздел 3. Элементы теории алгоритмов.

Занятие № 6. Формализация понятия алгоритма. Рекурсивные функции. Машина Тьюринга

1. Рекурсивные и вычислимые функции.

Рекурсией называется процесс последовательного вычисления значений некоторой функции.

Пусть требуется определить значение некоторой функции $f(n)$, где $n \in N$, чаще всего при $n \geq 0$. Рекурсивное задание функции состоит из двух этапов.

1) Функция $T(n)$ задается непосредственно в виде числовых значений для некоторого множества начальных значений n: $1 \leq n \leq m$.

2) Задается метод или формула, которые позволяют, зная все значения функции $f(n)$ при $n \leq k$ ($k \geq m$), вычислить ее значения при $n=k+1$, т.е. найти $f(k+1)$. Таким образом получают рекуррентное соотношение, описывающее рекурсивно заданную функцию.

Обычно эти два этапа записывают в виде рекуррентного соотношения с помощью фигурной скобки $\begin{cases} f(0) = 1, \\ f(k+1) = h\big(f(k)\big),\ k \geq 1 \end{cases}$

Простейшие (базовые) рекурсивные функции – это три вычислимые функции вида:

а) *ноль-функция*: $O(x)=O$, ; $\forall x \in N$;

б) *функция следования* (функция Пеано) или ***S***: $S(x)= x+1$, или $x'=x+1$, $\forall x \in N$, которая означает переход к следующему элементу заданного множества;

в) функция тождества, проектирующая функция или функция выделения аргумента $\rfloor^n_m : \rfloor^n_m \quad (x_1 \ldots, x_n) = x_m$, $1 \leq m \leq n$

Операция получения новой функции по имеющимся функциям.

а) *Оператор суперпозиции* (*подстановки*). В основе этого оператора лежит способ вычисления, состоящий в том, что если известен способ вычисления $f(x_1 \ldots, x_m)$ и $g(x_1 \ldots. x_n)$ (функций, зависящих от своих наборов аргументов), то подстановка каждого набора значений $g_1(x_1 \ldots. x_n) \ldots \ g_m(x_1 \ldots. x_n)$ дает способ вычисления $h=f(g(x))$ как функции от $x_1 \ldots. x_n$.

б) *Оператор примитивной рекурсии.* Операция получения новой функции из имеющихся двух функций через *рекуррентную* формулу $f(n+1)=h(n,f(n))$ основана на приеме вычисления функции натурального аргумента $f(n+1)$ по известному значению $f(n)$.

Пусть заданы некоторые числовые частичные функции: n-местная функция *g* и (*n*+2)- местная функция *h*. Тогда (*n*+1)- местная частичная функция *f* «конструируется» из функций *h* и *g* с помощью *оператора примитивной рекурсии f=R*(*g,h*)по схеме:

$$f(x_1, x_2,\dots,x_n, y)= \begin{cases} f(x1,\dots,xn,0) = \mathrm{g}\,(\mathrm{x1}\ \dots.\mathrm{xn}\,)\,, \mathrm{k}=0; \\ f(x1,\dots,xn,k) = h(x1,x2,\dots,xn,k-1, f(x_1, x_2,\dots,x_n, k-1)); \\ \qquad 1 \le \mathrm{k} \le \mathrm{y}, \end{cases}$$

и называется **примитивной рекурсией**.

Примитивно рекурсивными называются функции, полученные из трех базовых функций при помощи двух операций – *суперпозиции* и *примитивной рекурсии*.

в) Оператор минимизации. Операция построения новой функции μ (*x*) , зависящей от *n* переменных, по известной $f(x_1, x_2,\dots,x_n, y)$ согласно правилу $\mu\,(\mathrm{x}) = \min\limits_{y \in N} \{y| \, f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 0\}$ называется минимизацией

Функции, полученные из трех базовых функций при помощи применения конечного числа *трех* операций – *суперпозиции, примитивной рекурсии* и *минимизации* – называются **частично рекурсивными.**

Если частично рекурсивная функция определена всюду, то ее называют **общерекурсивной**. Так, *примитивно рекурсивная* функция является *общерекурсивной.*

Всякая *примитивно рекурсивная* функция является *вычислимой*.

Задание 6.1.

Пусть необходимо решить уравнение 0,8*x* = 3 с помощью компьютера, выполняющего все действия, кроме деления. Найдем алгоритм, позволяющий такому компьютеру решить такое и ему подобные уравнения. Т.е. покажем, что данная задача

является «вычислимой» или «разрешимой» в предложенной модели вычислений.

Решение:

1) Представим заданное уравнение в виде *x* = 0,2*x* + 3.

2) Зададим значение x_1=1 и рассмотрим последовательность значений x_n, определяемых соотношением: $\begin{cases} x1 = 1 \\ xn+1 = 0{,}2xn + 3 \end{cases}$

Получили рекурсивно заданную последовательность, в которой каждое последующее значение определяется через предыдущее.

3) Обозначим через r_n модуль разности $|x_{n+1} – x_n|= r_n$. Тогда если $x_{n+1} = 0.2\, x_n +3$ и $x_{n+2} =0{,}2\, x_{n+1} +3$, то $x_{n+2} – x_{n+1} = 0{,}2\, (x_{n+2} – x_{n+1})$.

4) Отсюда $r_{n+1}= 0,2\cdot r_n$. Можно доказать , что эта последовательность ограниченна и имеет предел.
5) Пусть $z = \lim_{n\to\infty} x_n$. Тогда $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (0,2x_n +3)$.
Отсюда $z = 0,2z+3$, т.е. значение предела является корнем заданного уравнения.
Так как мы смогли найти корень этого уравнения без операции деления, то наш компьютер сможет решать подобные уравнения с помощью такого алгоритма.
То есть действительно данная задача является «вычислимой» в предложенной модели вычислений. Полученный метод решения уравнения основан на понятии **рекурсии** (от лат. *recurro* – возвращаюсь).

Задание 6.2.
Найдите функции g и h в рекурсивной формуле $f(x+1)=h(x,f(x))$ для одноместной функции $f(x)=\sin \pi x$.
Решение: Алгоритм решения:
1) Найдем функцию $g(x)$, подставив в функцию $f(x)$ значение $x=0$.
Имеем $g(x)= f(0) = sin\ \pi\ 0 = 0$.
2) Подставим в функцию $f(x)$ вместо x значение $x+1$.
Имеем: $f(x+1)= \sin \pi(x+1)= \sin (\pi x+\pi)= – \sin \pi x$.
3) Выразим функцию $f(x+1)$ через $f(x)$ и x: $f(x+1)= – \sin \pi x= – f(x)$.
4) Найдем функцию $h(x,y)$ из формулы $f(x+1)= h(x, y)$, заменив $f(x)$ *на* y, а затем x на y: $h(x,y)= –y$.

Задание 6.3.
Имеется машина Тьюринга с внешним алфавитом A { $a_{0,}$ 1}, алфавитом внутренних состояний Q = {g_0 g_1} и функциональной схемой (программой).

A \ Q	g_0	g_1
a_0		g_0 1R
1	g_2 a_0 L	g_1 1R

В столбце g_0 ничего не написано, потому что g_0 − заключительное состояние машины, то есть такое состояние, оказавшись в котором машина останавливается.
Функциональную схему или программу кратко можно записать в виде последовательности из двух команд: $g_1\ a_0 \to g_0\ 1$, $g_1\ 1 \to g_1\ 1R$
Определите, в какое слово
перерабатывает машина каждое из следующих слов, если она находится в начальном состоянии g_1 и обозревает указанную ячейку:
а) $1a_0\ 11a_0\ a_0\ 11$ (обозревается ячейка 4, считая слева);
б) $11a_0\ 111a_0\ 1$ (обозревается ячейка 2);

в) $1a_0\ a_0\ 111$ (обозревается ячейка 3);
г) $1111a_0\ 11$ (обозревается ячейка 4);
д) $11a_0\ 1111$ (обозревается ячейка 3);
е) 1111111 (обозревается ячейка 4);
ж) 11111 (обозревается ячейка 5);
з) 111…1 (*k* единиц, обозревается *k*-я ячейка).

Изобразите схематически последовательность конфигураций, возникающих на ленте на каждом такте работы машины.

Решение.

а) Изобразим схематически начальную конфигурацию (начальное положение машины):

g_1

	1	a_0	1	1	a_0	a_0	1	1	

Схема означает, что машина находится в состоянии g_1 и обозревает ячейку, в которой записана буква 1, в соседней слева ячейке записана та же буква, а в соседней справа ячейке записана буква a_0 (то есть согласно нашему соглашению ничего не записано) и т.д. Ничего не записано и во всех непоказанных ячейках ленты.

На первом такте работы согласно команде $g_1\ 1 \rightarrow g_1\ 1R$ машина остается в прежнем состоянии 1, в обозреваемую ячейку вписывает букву 1 (то есть фактически оставляет уже вписанную в эту ячейку букву 1 неизменной) и переходит к обозрению следующей правой
ячейки (т.е. ячейки 5).

Изобразим схематически положение, в котором оказалась машина:

g_1

	1	a_0	1	1	a_0	a_0	1	1	

На втором такте работы согласно команде $g_1\ a_0 \rightarrow g_0\ 1$ машина вписывает в обозреваемую ячейку 5 букву 1, продолжает обозревать ту же ячейку и переходит в состояние g_0 , т о есть останавливается. Создавшаяся конфигурация имеет вид:

g_0

	1	a_0	1	1	1	a_0	1		

Таким образом, из данного начального положения слово $1a_0\ 11a_0\ a_0\ 11$ перерабатывается машиной в слово $1a_0\ 111a_0\ 11$.

Математические символы и обозначения

$\bar{\alpha}$, ¬a - отрицание a

∑ - суммирование,

X- декартово произведение,
∀- квантер общности,
∃- квантер существования,
E- универсальное множество,
∈- принадлежность элемента множеству,
∧ - конъюнкция,
∨- дизъюнкция,
→ импликация
↔ , ≡ - эквиваленция,
⇨ - логическое следование
<=> - равносильность высказывательных форм,
|= - непосредственная выводимость,
|- - выводимость
N' – множество натуральных чисел, дополненное 0,
B^n – n-ая декартова степень множества B,
∅ - пустое множество,
A\B – разность множеств A и B,
⟨ ⟩ - кортеж,
□ - множество натуральных чисел.

Математические сокращения.

ДНФ – дизъюнктивная нормальная форма.
КНФ – конъюнктивная нормальная форма.
СДНФ – совершенная дизъюнктивная нормальная форма.
СКНФ – совершенная конъюнктивная нормальная форма.

Вопросы к экзамену.

1. Предмет дискретной математики и объекты изучения. Высказывания. Логические парадоксы.
2. Булевы функции. Функции от одной переменной. Некоторые элементарные функции от двух переменных. Число булевых функций от n- переменных.
3. Свойства элементарных функций, правила Де-Моргана, поглощения, слияния.
4. Принцип двойственности (доказательство). Формальное правило получения двойственных функций.

5. Теорема о разложении функций по переменным. Следствие о разложении по 1 переменной.
6. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.
7. Совершенная конъюнктивная нормальная форма.
8. Теорема о разложении функций по переменным. Функционально полные системы.
9. Теорема Жегалкина. Полиномы Жегалкина. Метод Неопределённых коэффициентов.
10. Диаграммы Эйлера-Венна. Тавтология, противоречие.
11. Методы доказательств в алгебре логики.
12. Элементы комбинаторики. Размещения, перестановки, сочетания.
13. Определение графа. Представление графа в виде матрицы смежности и инцидентности.
14. Эйлеров граф. Критерий существования Эйлерова цикла (доказательство).
15. Алгоритм Дейкстры нахождения кратчайшего пути в графе.
16. Задача о многополюсной кратчайшей цепи. Алгоритм Флойда.
17. Задача о максимальном потоке. Алгоритм Форда- Фалкерсона.
18. Метод ветвей и границ в задаче о коммивояжере.
19. Эвристические алгоритмы. NP – полнота.
20. Метод динамического программирования в задаче « Разбиение».
21. Деревья. Теорема об остове минимального веса. Алгоритм Краскала.
22. Деревья. Теорема об остове минимального веса. Алгоритм Прима.
23. Гамильтоновы циклы. Метод латинской композиции.
24. Понятие алгоритма. Словарные функции. Машина Тьюринга.
25. Машина с неограниченным числом регистров. Определение, описание работы.
26. Вычислимые функции. Основные функции, доказательство их вычислимости. Порождение вычислимых функций, операции соединения, подстановки, уравнения примитивной рекурсии.
27. Система обработки символов Поста.
28. Нормальные алгоритмы Маркова.
29. Понятие об алгоритмической неразрешимости. Проблема самоприменимости.
30. Проблема остановки машины Тьюринга. Проблема пустой ленты.
31. Теория кодирования. Теорема о разделимости префиксной схемы.
32. Неравенство Макмиллана.
33. Оптимальное кодирование Хаффмана. Цена кодирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галушкина Ю.И., Марьямов А.Н. Конспект лекций по дискретной математике. – М. Айрис-пресс, 2016. – 176с.
2. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения. – 5-е изд. М.:Вузовская книга, 2012. – 268с.: ил.
3. Игошин В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов.:учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. – М.: Издательский центр «Академия», 2017. – 304с.
4. Карпов Ю.Г. Теория автоматов. – СПб.: Питер, 2012. – 224 с.: ил.
5. Круглов В.В., Дли М.И. Интеллектуальные информационные системы. – М.: Физматлит, 2012. – 256с.
6. Куликов.В.В. Дискретная математика: учебное пособие. – М.: РИОР, 2017. – 174 с.
7.Лавров И.А. Математическая логика. – М: Издательский центр Академия, 2016. – 240 с.
8. Москинова Г.И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях.: учебное пособие. – М.: Логос, 2012. – 240с.,ил.
9. Соболева Т.С., Чечкин А.В. Дискретная математика. – М.: Издательский центр Академия, 2016. – 256 с.
10. Просветов Г.И. Дискретная математика: задачи и решения: учебное пособие. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2016. – 222с.
11. Спирина М.С. Дискретная математика. Учебно-методическое пособие для проведения практических занятий по математике для студентов специальности 351400. – Тольятти, ТГУС, 2016. – 88 с.
12. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Математическая логика и теория алгоритмов: Учебник. – М.: ИНФРА-М; Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2016. – 224с.
13. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Элементы дискретной математики: Учебник. – М.: ИНФРА-М; Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2013. – 280с.
14. Спирина М.С. Конспект лекций по курсу «Математическая логика и теория алгоритмов» для студентов специальности «Информатика и вычислительная техника».